

یک رویکرد مبتنی بر نامساوی ماتریسی خطی برای طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم در سیستم‌های غیرخطی دارای عدم قطعیت و محدودیت در ورودی کنترل

ولی‌اله غفاری

استادیار گروه مهندسی برق، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران، vghaffari@pgu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۵/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۱/۱۴)



دانشگاه صنعتی سهند

نشریه سالانه‌های غیرخطی در مهندسی برق

دوره ۶ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۳۹۸

صفحات ۷۴ الی ۹۰

ISSN: 2322-3146

http://jnsee.sut.ac.ir

چکیده

در این مقاله، کنترل پیش‌بین مقاوم برای یک سیستم غیرخطی دارای عدم قطعیت و محدودیت سیگنال ورودی طراحی شده است. برای این منظور، ابتدا یک سیستم دینامیکی با وجود عدم قطعیت‌های هم‌زمان جمع‌شونده و چندوجهی در نظر گرفته می‌شود. برای طراحی کنترل پیش‌بین، رفتار دینامیکی سیستم با استفاده از یک مدل نامی پیش‌بینی می‌شود؛ سپس، در لحظات معلومی از زمان، سیگنال ورودی به گونه‌ای تعیین می‌شود که یک تابع هزینه معلوم کمینه شود. برای بهینه شدن تابع هزینه، در لحظات معینی از زمان، یک قانون کنترل به فرم فیدبک حالت انتخاب می‌شود. در نتیجه، مسأله طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم به انتخاب مناسب بهره فیدبک منجر می‌شود. در نهایت، مسأله طراحی کنترل پیش‌بین به یک مسأله کمینه‌سازی با وجود قیدهای نامساوی ماتریسی خطی تبدیل می‌شود. با حل عددی این مسأله، می‌توان بهره قانون کنترل فیدبک حالت را تعیین نمود. روش کنترل بدست آمده در یک سیستم مرتبه دوم دارای عدم قطعیت و محدودیت ورودی شبیه‌سازی و عملکرد آن با کنترل‌کننده‌های دیگر مقایسه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی انجام شده، اثربخش بودن قانون کنترل پیشنهادی را در مقایسه با روش‌های موجود نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی

کنترل پیش‌بین مقاوم،
نامساوی ماتریسی خطی،
سیستم‌های دارای عدم قطعیت،
سیستم‌های غیرخطی،
محدودیت در ورودی کنترل.



**Sahand University
of Technology**

Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering

Vol.6, No.2

Autumn and Winter 2019

ISSN: 2322 – 3146

[http: //jnsee.sut.ac.ir](http://jnsee.sut.ac.ir)

A Linear Matrix Inequality Approach to Design Robust Model Predictive Control for Nonlinear Uncertain Systems Subject to Control Input Constraint

Valiollah Ghaffari

Assistant Professor, Department of Electrical Engineering, Persian Gulf University, Bushehr, Iran, vghaffari@pgu.ac.ir.

ABSTRACT

Keywords

Robust model predictive control (RMPC),
Linear matrix inequality (LMI),
Uncertain systems,
Nonlinear systems,
Constrained control input.

In this paper, a robust model predictive control (MPC) algorithm is designed for nonlinear uncertain systems in presence of the control input constraint. To achieve this goal, first, the additive and polytopic uncertainties are formulated in the nonlinear uncertain system. Then, the control policy is chosen as a state feedback control law in order to minimize a given cost function at each known sample-time. Finally, the robust MPC problem is transformed into another optimization problem subject to some linear matrix inequality (LMI) constraints. The controller gains are determined via the online solution of the proposed minimization problem in real-time. The suggested method is simulated for a second order nonlinear uncertain system. The closed-loop performance is compared to other control techniques. The simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm compared to some existing control methods.

۱ - مقدمه

امروزه انتخاب مناسب پارامترها در یک سیستم کنترل، مسأله کلیدی برای عموم مهندسان از جمله مهندسان کنترل است. تکنیک‌های ریاضی مختلفی برای تنظیم یا طراحی مناسب پارامتر در یک سیستم کنترل وجود دارد. انتخاب پارامترها با بهینه‌سازی یک شاخص معلوم (مانند انرژی، سوخت و توابع هزینه دیگر) یکی از متداول‌ترین روش‌های مهندسی است. در یک سیستم دینامیکی، با طراحی کنترل بهینه، سیگنال‌های کنترل مناسب توسط قانون کنترل محاسبه می‌شود و سپس به عملگرهای آن سیستم ارسال می‌شود. برای سیستم‌های دینامیکی، اعم از نمایش پیوسته‌زمان و گسسته‌زمان، الگوریتم‌های متنوعی برای طراحی کنترل بهینه وجود دارد. تنظیم‌کننده مربعی خطی^۱ (یا به اختصار LQR) از مشهورترین روش‌های کنترلی است. یک مسأله کنترل بهینه می‌تواند در افق محدود یا نامحدود بررسی شود. معمولاً مسأله‌های کنترل با افق محدود، دارای حجم محاسبات بالاتری نسبت به نوع افق نامحدود هستند. در طراحی کنترل بهینه، سیستم‌های خطی و مستقل از زمان (LTI)، معمولاً دارای جواب‌های فرم‌بسته‌ای هستند. در یک سیستم LTI ، با تابع هزینه مربعی دارای افق محدود، به معادله ریکاتی (نوع دیفرانسیلی یا تفاضلی) منجر خواهد شد. همچنین با نامحدود کردن افق انتگرال‌گیری در تابع هزینه، به معادله ریکاتی جبری خواهیم رسید. معادله ریکاتی جبری دارای جوابی مستقل از زمان خواهد بود. پس با انتخاب این جواب، به یک کنترل فیدبک زیربهینه (با بهره ثابت) دست خواهیم یافت [۱].

اگر چه ایده LQR برای سیستم دینامیکی بدون عدم قطعیت طراحی شده است، اما مسأله LQR با افق نامحدود، مقاومت خوبی (کمینه حد فاز ۶۰ درجه و حد بهره بی نهایت) نسبت به وجود عدم قطعیت در سیستم دارد [۲]. بنابراین علی‌رغم این که روش LQR ، عدم قطعیت‌های یک سیستم را در طراحی قانون کنترل در نظر نمی‌گیرد، اما در صورت وجود عدم قطعیت‌های کوچک و ناچیز دارای پاسخ قابل قبولی است. بدیهی است که اگر عدم قطعیت سیستم دارای مقدار قابل توجهی باشد، آن وقت نباید انتظار پاسخ خوبی از قانون کنترل LQR داشت [۳]. اخیراً با پیشرفت‌های شگرف در زمینه محاسبات ماتریسی، روش‌ها و ابزارهای کارآمدی برای حل معادله‌ها و نامعادله‌های (نامساوی‌های) ماتریسی پیشنهاد شده است [۴]؛ از آن جمله، می‌توان به ابزارهای بهینه‌سازی عددی از قبیل $YALMIP$ ، $SEDUMI$ ، $MOSEK$ ، $SDPT3$ و $LMI Lab$ اشاره کرد.

در سیستم‌های دینامیکی دارای عدم قطعیت، اگر قیدهای مسأله با نامساوی‌های ماتریسی خطی^۲ (LMI) نوشته شود، آنگاه یک رویکرد برای تحلیل پایداری و یا طراحی سیستم کنترل مقاوم و پایدارسازی (با نمایش پیوسته‌زمان یا گسسته‌زمان)، بهره‌گیری از روش LMI است [۵، ۶]. پایداری مجانبی یک سیستم دینامیکی را می‌توان منوط به داشتن جواب یک LMI بیان نمود. از این رو، اگر یک یا تعدادی LMI دارای جواب بود، آن وقت آن سیستم دینامیکی پایدار مجانبی خواهد بود [۷]. همچنین با حل نمودن یک مجموعه LMI ، به کنترل‌کننده پایدارساز برای یک سیستم دینامیکی خواهیم رسید [۸]. گاهی اوقات یک مسأله کنترل بهینه مانند کنترل پیش‌بین را می‌توان به یک مسأله بهینه‌یابی دیگر با وجود مجموعه قیدهای LMI تبدیل نمود [۹، ۱۰]. پس با حل عددی چنین مسأله بهینه‌یابی، پارامترهای آن سیستم کنترل تعیین خواهد شد [۱۱].

^۱Linear Quadratic Regulator^۲Linear Matrix Inequality

اخیراً، کنترل پیش‌بین (که شاخه‌ای از علم کنترل بهینه است) بیشتر مورد توجه پژوهشگران واقع شده است. در کنترل پیش‌بین، با داشتن یک مدل نامی، در لحظات معینی از زمان، آینده (رفتار) یک سیستم دینامیکی پیش‌بینی می‌شود. سپس قانون کنترل به گونه‌ای طراحی می‌شود تا یک تابع هزینه کمینه شود. در کنترل پیش‌بین، از تلفیق ایده‌های کنترل بهینه و پیش‌بینی توسط یک مدل موجود بهره گرفته می‌شود. در حال حاضر کنترل پیش‌بین دارای کاربردهای عملی موفق و فراوانی است. از آن جمله می‌توان به کنترل وضعیت ماهواره و فضاپیما [۱۲]، راکتور شیمیایی [۶ و ۱۳]، ستون تقطیر [۱۴]، مدیریت انرژی [۱۵] و غیره اشاره نمود.

در سیستم‌های گسسته‌زمان، رابطه بین سیگنال‌های ورودی و خروجی با یک معادله جبری بیان می‌شود. بنابراین، به دلیل نیاز به حجم محاسبات کمتر در مقایسه با سیستم‌های پیوسته‌زمان، کنترل پیش‌بین ابتدا برای سیستم‌های گسسته‌زمان مطرح شد و سپس، برای سیستم‌های پیوسته‌زمان تعمیم داده شد [۱۶-۱۸]. روش‌های کنترلی متنوعی برای طراحی کنترل پیش‌بین با نمایش گسسته‌زمان، پیشنهاد شده است. از آن جمله، به الگوریتم‌های کنترل پیش‌بین فرم‌بسته (مانند DMC ، MAC و GPC) [۱۹] و طراحی کنترل پیش‌بین با وجود محدودیت ورودی کنترل [۲۰] و دارای افق پیش‌بین تطبیقی [۲۱] اشاره می‌شود. یک سیستم پیوسته‌زمان را می‌توان با تقریب خوبی گسسته‌سازی نمود؛ سپس، یک کنترل پیش‌بین برای آن سیستم دینامیکی طراحی نمود [۲۲]. با وجود ابزارهای قوی ذکر شده، برای حل نامساوی‌های ماتریسی، روش‌های مبتنی بر LMI دارای برتری‌هایی نسبت به روش‌های دیگر هستند. از این رو طراحی کنترل مقاوم مبتنی بر LMI بیشتر مورد توجه محققان واقع شده است [۹، ۲۳]. در یک سیستم دینامیکی، در اختیار داشتن مدل دقیق از آن سیستم، امری مشکل است؛ از این رو، پیش‌بینی رفتار سیستم دینامیکی معمولاً با یک مدل نامی (دارای خطای مدل‌سازی) انجام می‌شود. در نتیجه، در سیستم‌های دارای عدم قطعیت، طراحی کنترل مقاوم امری ضروری و اجتناب ناپذیر است. عدم قطعیت با نمایش‌های مختلفی از قبیل جمع‌شونده^۱، ضرب‌شونده^۲، چندوجهی^۳ و غیره می‌تواند توصیف شود. در مقالات موجود، معمولاً با وجود فقط یک نوع عدم قطعیت در سیستم، به طراحی کنترل پیش‌بین پرداخته شده است [۱۶، ۲۴]. بنابراین با وجود عدم قطعیت از نوع دیگر، آن روش کنترل قابل استفاده نیست.

در این مطالعه، یک سیستم غیرخطی با نمایش پیوسته‌زمان دارای عدم قطعیت‌های هم‌زمان جمع‌شونده و چندوجهی، با وجود محدودیت در ورودی کنترل، در نظر گرفته می‌شود. به منظور طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم، ابتدا عدم قطعیت در آن سیستم دینامیکی به طریق مناسبی فرمول‌بندی می‌شود. برای کمینه‌سازی تابع هزینه، در لحظات معینی از زمان، یک قانون کنترل به صورت فیدبک حالت انتخاب می‌شود. در این مقاله، مسأله طراحی قانون کنترل به انتخاب مناسب بهره فیدبک منجر می‌شود. در نهایت، مسأله طراحی کنترل به یک مسأله کمینه‌سازی با وجود قیدهای نامساوی ماتریسی خطی تبدیل می‌شود. با حل عددی چنین مسأله‌ای، می‌توان بهره قانون کنترل فیدبک حالت را تعیین نمود. الگوریتم کنترلی بدست آمده در یک مثال عددی شبیه‌سازی و عملکرد قانون کنترل پیشنهادی با روش LQR و یک کنترل پیش‌بین دیگر مقایسه خواهد شد. در یک سیستم مرتبه دوم دارای دو نوع عدم قطعیت (چندوجهی و جمع‌شونده) و محدودیت ورودی، نتایج شبیه‌سازی نشانگر کارآیی رویکرد پیشنهادی در مقایسه با روش‌های موجود است.

¹Additive Uncertainty

²Multiplicative Uncertainty

³Polytopic Uncertainty

مطالب ارائه شده در این مقاله به قرار زیر است: ابتدا، در بخش دوم، عدم قطعیت و مسأله کنترل پیش‌بین مقاوم فرمول‌بندی می‌شود. سپس، در بخش سوم، برای دسته خاصی از سیستم دارای عدم قطعیت، کنترل پیش‌بین مقاوم با استفاده از LMI طراحی می‌شود. در بخش چهارم، نتایج بدست آمده، در یک مثال عددی شبیه‌سازی می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری مقاله در بخش پنجم بیان خواهد شد.

۲- بیان مسأله کنترل

سیستم دینامیکی پیوسته‌زمان دارای عدم قطعیت، با نمایش (۱) را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{dt} = A(\theta)x + f(x, t) + B(\theta)u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

در این سیستم غیرخطی $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بیانگر بردار حالت، $\theta \in \mathbb{R}^p$ بردار نامعلوم (عدم قطعیت چندوجهی) و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی کنترل دارای محدودیت $\|u(t)\| \leq u_{max}$ است. بردار عدم قطعیت θ ، بردار ورودی u و بردار حالت x می‌توانند به صورت (۲) نوشته شوند:

$$\begin{aligned} \theta &= [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_p]^T \\ u &= [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m]^T \\ x &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \end{aligned} \quad (2)$$

فرض ۱: در سیستم دینامیکی دارای عدم قطعیت (۱)، تابع غیرخطی $f(x, t)$ نامعلوم بوده اما در نامساوی (۳) صدق می‌کند:

$$\|f(\mu, t) - f(\eta, t)\| \leq L_p \|\mu - \eta\|, \quad \forall \mu, \eta \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

رابطه (۳)، به نامساوی لیپ‌شیتز معروف است و در آن، پارامتر L_p مقدار ثابت و معلومی است.

فرض ۲: در سیستم دینامیکی (۱)، ماتریس‌های $A(\theta)$ و $B(\theta)$ نامعلوم هستند و در رابطه (۴) صدق می‌کنند:

$$[A(\theta) \quad B(\theta)] \in \Omega \quad (4)$$

در رابطه (۴)، ناحیه Ω یک مجموعه محدب را توصیف می‌کند.

روشن است که اگر بردار θ دارای p پارامتر باشد، آنگاه چندوجهی Ω دارای 2^p رأس^۱ خواهد بود. بنابراین مجموعه محدب Ω به صورت (۵) تعریف می‌شود:

$$\Omega = \{ [A(\theta) \quad B(\theta)] = \sum_{j=1}^{2^p} \theta_j [A_j \quad B_j], \quad \theta_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{2^p} \theta_j = 1 \} \quad (5)$$

در این تعریف، یال‌های مجموعه محدب Ω با ماتریس‌های معلوم A_j و B_j مشخص می‌شوند. در مجموعه محدب Ω ، ثابت‌های θ_j و $j = 1, 2, \dots, 2^p$ دارای مقادیر نامعلوم است.

^۱Generators

سیستم‌های دینامیکی فراوانی اعم از مکانیکی، الکتریکی، شیمیایی و غیره وجود دارد که می‌توان آنها را به فرم رابطه (۱) توصیف نمود. ساده‌ترین مثال، سیستم مکانیکی دارای جرم m ، فنر k و میراگر b است. رابطه ریاضی بین جابه‌جایی y و نیروی اعمالی u در این سیستم مکانیکی با معادله (۶) توصیف می‌شود:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = u \quad (6)$$

روشن است که اگر جرم m مقدار ثابتی باشد و مقادیر فنر k یا میراگر b دارای عدم قطعیت (به نمایش ضرب یا جمع شونده) باشند، آنگاه معادله دیفرانسیل (۶)، فرم خاصی از رابطه (۱) خواهد بود.

فرض ۳: حالت‌های سیستم دینامیکی (۱)، در لحظه معلوم t_k ، در دسترس هستند. به علاوه، فرض می‌کنیم که سیستم پیوسته‌زمان دارای عدم قطعیت و محدودیت ورودی (۱) پایدارپذیر است. در نتیجه، در سیستم دینامیکی (۱)، جفت‌های A_j و B_j به ازای $j = 1, 2, \dots, 2^p$ پایدارپذیر هستند. پس، سیگنال کنترل $u(t)$ وجود دارد که سیستم دینامیکی (۱) پایدار مجانبی باشد.

در این مسأله کنترل، علی‌رغم این که هم‌زمان عدم قطعیت جمع‌شونده (نامعلوم بودن تابع غیرخطی $f(x, t)$ و عدم قطعیت چندوجهی (نامعلوم بودن ماتریس‌های $A(\theta)$ و $B(\theta)$) را داریم؛ اما، در لحظه t_k ، می‌خواهیم یک قانون کنترل بهینه به صورت فیدبک حالت، برای سیستم دینامیکی (۱) به گونه‌ای طراحی شود که تابع هزینه (۷) کمینه شود:

$$J(u) = \int_{t_k}^{+\infty} (\hat{x}^T(\tau|t_k) Q \hat{x}(\tau|t_k) + \hat{u}^T(\tau|t_k) R \hat{u}(\tau|t_k)) d\tau \quad (7)$$

در رابطه (۷)، ماتریس‌های $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ به ترتیب بیانگر تأثیر بردار حالت و سیگنال کنترل بر تابع هزینه است. فرض می‌شود که وزن‌های Q و R ماتریس‌های متقارن و مثبت معین (یا نیمه معین) هستند. در یک مسأله تنظیم، اگر سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی شود، آنگاه مقدار نهایی بردار حالت صفر خواهد شد. از این رو، به منظور ساده‌سازی مسأله و طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم با نمایش LMI ، افق‌های کنترل و پیش‌بین (انتگرال‌گیری) نامحدود انتخاب شده است. در تابع هزینه (۷)، عبارت‌های $\hat{x}(\tau|t_k)$ و $\hat{u}(\tau|t_k)$ به ترتیب بیانگر حالت و سیگنال کنترل پیش‌بینی هستند که با شرط‌های اولیه $\hat{x}(t_k|t_k) = x(t_k)$ و $\hat{u}(t_k|t_k) = u(t_k)$ استفاده خواهند شد. در سیستم دینامیکی (۱)، اگر ماتریس‌های A و B معلوم بود و تابع غیرخطی وجود نداشت ($f(x, t) = 0$)، آنگاه، می‌شد با حل معادله ریکاتی جبری، قانون کنترل LQR (بدون قید روی ورودی) را به فرم $u = Kx$ بدست آورد. روشن است که قانون کنترل LQR برای سیستم بدون عدم قطعیت و محدودیت ورودی طراحی شده است. مسأله LQR با افق نامحدود، مقاومت خوبی نسبت به وجود عدم قطعیت در سیستم دارد. بنابراین، گرچه LQR عدم قطعیت‌های سیستم را در تحلیل پایداری و طراحی کنترل در نظر نمی‌گیرد؛ اما، در حضور عدم قطعیت‌های کوچک دارای پاسخ قابل قبولی است. طبیعی است که اگر عدم قطعیت سیستم دارای مقدار بزرگی باشد، آن وقت نباید انتظار پاسخ خوبی از قانون کنترل کلاسیکی مانند LQR در حضور محدودیت ورودی داشت. در این مطالعه، یک سیستم غیرخطی با نمایش پیوسته‌زمان، دارای عدم قطعیت‌های هم‌زمان جمع‌شونده و چندوجهی، با وجود محدودیت در ورودی کنترل، در نظر گرفته می‌شود. با انجام عملیات ریاضی، مسأله طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم در سیستم غیرخطی دارای عدم قطعیت و محدودیت سیگنال ورودی، به یک مسأله کمینه‌سازی با وجود قیدهای نامساوی ماتریسی خطی تبدیل خواهد شد.

در ادامه به بیان پیش‌نیازهای ریاضی مورد نیاز مانند لم متمم شور^۱ و لم باربالات^۲ پرداخته شده است:

لم متمم شور: برای ماتریس‌های متقارن $X \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ، $Y \in \mathbb{R}^{r \times r}$ و ماتریس مستطیلی $Z \in \mathbb{R}^{q \times r}$ ، نامساوی‌های زیر با هم معادل هستند [۲۵]:

(الف) ماتریس متقارن $\Phi = \begin{bmatrix} X & Z \\ Z^T & Y \end{bmatrix}$ مثبت معین است.

(ب) اگر ماتریس Y معکوس پذیر باشد، آن وقت ماتریس‌های متقارن Y و $X - ZY^{-1}Z^T$ مثبت معین خواهند بود.

(ج) اگر ماتریس X معکوس پذیر باشد، آن وقت ماتریس‌های متقارن X و $Y - Z^T X^{-1}Z$ مثبت معین خواهند بود.

از نامساوی شور بدیهی است که اگر ماتریس Φ مثبت معین باشد، آنگاه ماتریس‌های X و Y مثبت معین خواهند بود.

لم باربالات: فرض کنید تابع $\varphi(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در بازه $[0, +\infty)$ پیوسته یکنواخت باشد. اگر حد $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ وجود داشته باشد، آنگاه $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ خواهد بود [۲۶].

در بخش بعد، به بیان مسأله و طراحی کنترل پیش‌بین در سیستم دارای عدم قطعیت پرداخته شده است.

۳- طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم

در این مقاله، برای سیستم پیوسته زمان غیرخطی (۱) که دارای دو نوع عدم قطعیت و محدودیت در سیگنال ورودی است، با یک رویکرد مبتنی بر LMI کنترل پیش‌بین مقاوم طراحی می‌شود. روش کنترل پیشنهادی به کمینه‌سازی تابع هزینه (۷) در لحظه t_k ، با وجود محدودیت و عدم قطعیت‌های ذکر شده می‌پردازد. بنابراین مسأله کمینه‌سازی عددی، در زمان مورد نظر، به صورت آنلاین حل شده و سپس پارامترهای کنترل‌کننده به‌روزرسانی خواهند شد.

قضیه ۱: سیستم دینامیکی دارای عدم قطعیت و محدودیت ورودی (۱)، با فرض‌های ۱ تا ۳ را در نظر بگیرید. اگر در زمان t_k اعداد مثبت ρ و γ ، ماتریس مثبت معین $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و ماتریس $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را بتوان یافت که مسأله کمینه‌سازی زیر دارای جواب باشد:

$\min \gamma$

$$\begin{bmatrix} X & x(t_k) \\ x^T(t_k) & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (۸)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y^T \\ Y & u_{max}^2 I_m \end{bmatrix} \geq 0 \quad (۹)$$

$$\begin{bmatrix} XA_j^T + A_j X + B_j Y + Y^T B_j^T + \rho I_n & L_p X & Y^T & X \\ & L_p X & 0 & 0 \\ & Y & 0 & 0 \\ & X & 0 & -\gamma Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2^p \quad (۱۰)$$

^۱Schur's Complement Lemma

^۲Barbalat's Lemma

آنگاه، با قانون کنترل $u(t) = K(t_k)x(t)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$ و بهره $K(t_k) = YX^{-1}$ ، سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی شده و عدد مثبت γ ، کران بالایی تابع هزینه (۷) در زمان t_k خواهد بود.

اثبات: با قانون کنترل $u = Kx$ ، در بازه زمانی $t_k \leq t < t_{k+1}$ ، سیستم حلقه بسته به صورت معادله دیفرانسیل (۱۱) نوشته می‌شود:

$$\frac{dx}{dt} = (A + BK)x + f(x, t) \quad (11)$$

تابع هزینه (۷) نیز به فرم (۱۲) در می‌آید:

$$J(K) = \int_{t_k}^{+\infty} \hat{x}^T(\tau|t_k)(Q + K^T RK)\hat{x}(\tau|t_k)d\tau \quad (12)$$

برای تحلیل سیستم حلقه بسته (۱۱)، تابع لیاپانف مربعی $V(x) = x^T Px$, $P = P^T > 0$ را انتخاب می‌کنیم. مشتق تابع لیاپانف $V(x)$ نسبت به زمان به صورت (۱۳) است:

$$\frac{d}{dt}V(x) = x^T(A^T P + PA + PBK + K^T B^T P)x + x^T P f(x, t) + f^T(x, t)Px \quad (13)$$

ابتدا می‌خواهیم نشان دهیم که از رابطه (۱۰) می‌توان نامساوی (۱۴) را نتیجه گرفت:

$$\frac{d}{dt}V(x(\tau|t_k)) \leq -(x^T(\tau|t_k)Qx(\tau|t_k) + u^T(\tau|t_k)Ru(\tau|t_k)) \quad (14)$$

بدین منظور، با استفاده از ویژگی ذکر شده برای مجموعه محدب Ω در فرض ۲، اگر نامساوی‌های (۱۰) برقرار باشد، آنگاه رابطه (۱۵) را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX + BY + Y^T B^T + \rho I_n & L_p X & Y^T & X \\ & L_p X & 0 & 0 \\ & Y & -\gamma R^{-1} & 0 \\ & X & 0 & -\gamma Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (15)$$

در نامعادله (۱۰)، با توجه به رابطه $[A(\theta) \ B(\theta)] = \sum_{j=1}^{2^p} \theta_j [A_j \ B_j]$ ، یال‌های مجموعه محدب Ω با ماتریس‌های معلوم A_j و B_j ($j = 1, 2, \dots, 2^p$) تعیین شد. با استفاده از لم شور، نامساوی ماتریسی (۱۵) می‌تواند به صورت (۱۶) نوشته شود:

$$XA^T + AX + BY + Y^T B^T + \rho^{-1} L_p^2 X^2 + \rho I_n + \gamma^{-1} X Q X + \gamma^{-1} Y^T R Y \leq 0 \quad (16)$$

حال در رابطه (۱۶)، متغیرهای $\rho_0 = \rho^{-1} \gamma$ ، $X = \gamma P^{-1}$ و $Y = \gamma K P^{-1}$ جایگذاری می‌گردند. پس، داریم:

$$\begin{aligned} & \gamma P^{-1} A^T + \gamma A P^{-1} + \gamma B K P^{-1} + \gamma P^{-1} K^T B^T + \rho_0 \gamma L_p^2 P^{-2} \\ & + \rho_0^{-1} \gamma I_n + \gamma P^{-1} Q P^{-1} + \gamma P^{-1} K^T R K P^{-1} \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

در رابطه (۱۷) اسکالر ρ_0 و γ اعداد مثبتی می‌باشد. روشن است بهره فیدبک حالت از معادله $K = YX^{-1}$ بدست خواهد آمد. طرفین رابطه (۱۷) را از سمت راست و چپ، در ماتریس متقارن $\gamma^{-\frac{1}{2}} P$ ضرب می‌کنیم.

$$A^T P + PA + PBK + K^T B^T P + \rho_0 L_p^2 I_n + \rho_0^{-1} P^2 + Q + K^T R K \leq 0 \quad (18)$$

نامساوی (۱۸)، معادل با رابطه (۱۹) است:

$$\hat{x}^T(\tau|t_k)(A^T P + PA + PBK + K^T B^T P)\hat{x}(\tau|t_k) + \rho_0 L_p^2 \|\hat{x}(\tau|t_k)\|^2 + \rho_0^{-1} \|P\hat{x}(\tau|t_k)\|^2 \leq -\hat{x}^T(\tau|t_k)(Q + K^T R K)\hat{x}(\tau|t_k) \quad (19)$$

به ازای $\rho_0 > 0$ ، همواره نامساوی $(\sqrt{\rho_0}f(\hat{x}, t) - \sqrt{\rho_0^{-1}}P\hat{x})^T (\sqrt{\rho_0}f(\hat{x}, t) - \sqrt{\rho_0^{-1}}P\hat{x}) \geq 0$ برقرار می‌باشد. پس، نامساوی (۲۰) را می‌توان نوشت:

$$\hat{x}^T(\tau|t_k)Pf(\hat{x}(\tau|t_k), t) + f^T(\hat{x}(\tau|t_k), t)P\hat{x}(\tau|t_k) \leq \rho_0 f^T(\hat{x}(\tau|t_k), t)f(\hat{x}(\tau|t_k), t) + \rho_0^{-1}\hat{x}^T(\tau|t_k)P^2\hat{x}(\tau|t_k) \quad (20)$$

طبق فرض ۱، رابطه (۲۰) دارای کران بالای (۲۱) است:

$$\hat{x}^T(\tau|t_k)Pf(\hat{x}(\tau|t_k), t) + f^T(\hat{x}(\tau|t_k), t)P\hat{x}(\tau|t_k) \leq \rho_0 L_p^2 \|\hat{x}(\tau|t_k)\|^2 + \rho_0^{-1} \|P\hat{x}(\tau|t_k)\|^2 \quad (21)$$

پس با لحاظ نمودن نامساوی (۲۱)، رابطه (۱۳) دارای حد بالایی به صورت (۲۲) است:

$$\frac{d}{dt}V(\hat{x}(\tau|t_k)) \leq \hat{x}^T(\tau|t_k)(A^T P + PA + PBK + K^T B^T P)\hat{x}(\tau|t_k) + \rho_0 L_p^2 \|\hat{x}(\tau|t_k)\|^2 + \rho_0^{-1} \|P\hat{x}(\tau|t_k)\|^2 \quad (22)$$

پس با توجه به رابطه (۱۹)، مشتق تابع لیاپانف دارای کران بالایی به صورت (۲۳) است:

$$\frac{d}{dt}V(\hat{x}(\tau|t_k)) \leq -\hat{x}^T(\tau|t_k)(Q + K^T R K)\hat{x}(\tau|t_k) = -(\hat{x}^T(\tau|t_k)Q\hat{x}(\tau|t_k) + \hat{u}^T(\tau|t_k)R\hat{u}(\tau|t_k)) \quad (23)$$

بنابراین، از رابطه (۱۰)، می‌توان نامساوی (۱۴) را نتیجه گرفت. از طرفین رابطه (۲۳)، از زمان t_k تا $+\infty$ انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\int_{t_k}^{+\infty} \frac{dV(\hat{x}(\tau|t_k))}{d\tau} d\tau \leq -\int_{t_k}^{+\infty} (\hat{x}^T(\tau|t_k)Q\hat{x}(\tau|t_k) + \hat{u}^T(\tau|t_k)R\hat{u}(\tau|t_k)) d\tau \quad (24)$$

پس، داریم:

$$\int_{t_k}^{+\infty} \frac{dV(\tau|t_k)}{d\tau} d\tau \leq -J(K) \quad (25)$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} V(\hat{x}(\tau|t_k)) - V(\hat{x}(t_k)) \leq -J(K) \quad (26)$$

نامساوی (۲۶) می‌تواند به صورت رابطه (۲۷) نوشته شود:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} V(\hat{x}(\tau|t_k)) \leq V(\hat{x}(t_k)) - J(K) \quad (27)$$

تابع لیاپانف $V(\hat{x}(t_k))$ و تابع هزینه $J(K)$ همواره مقدار مثبتی هستند. بنابراین طبق لم باربالات خواهیم داشت:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} V(\hat{x}(\tau|t_k)) = 0 \quad (28)$$

رابطه (۲۶)، با ساده‌سازی به نامساوی زیر منجر می‌شود:

$$J(K) \leq V(x(t_k)) = x^T(t_k)Px(t_k) \leq \gamma \quad (29)$$

با جایگذاری $X = \gamma P^{-1}$ ، رابطه (۲۹) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$x^T(t_k)X^{-1}x(t_k) \leq 1 \quad (30)$$

با استفاده از لم متمم شور به نامساوی ماتریسی زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} X & x(t_k) \\ x^T(t_k) & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (31)$$

بنابراین اگر مسأله کمینه‌سازی γ با وجود قیدهای (۸) و (۱۰)، در زمان t_k ، حل شود آن وقت بهره کنترل‌کننده، در آن لحظه از زمان، بدون لحاظ شدن محدودیت سیگنال کنترل، بدست خواهد آمد. در ادامه، وجود محدودیت روی سیگنال ورودی $\|u(t)\| \leq u_{max}$ بررسی می‌شود. نرم دوم بردار ورودی $u(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\|u(t)\|^2 = x^T(t)X^{-1}Y^T YX^{-1}x(t) \quad (32)$$

اگر نامساوی ماتریسی زیر برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} X & Y^T \\ Y & u_{max}^2 I_m \end{bmatrix} \geq 0 \quad (33)$$

با استفاده از لم شور خواهیم داشت:

$$Y^T Y \leq u_{max}^2 X \quad (34)$$

از رابطه (۳۳) می‌توان به نامساوی زیر رسید:

$$x^T(t)X^{-1}x(t) \leq 1 \quad (35)$$

پس، نرم دوم بردار ورودی $u(t)$ دارای کران بالایی به صورت زیر است:

$$\|u(t)\|^2 \leq u_{max}^2 x^T(t)X^{-1}x(t) \leq u_{max}^2 \quad (36)$$

بنابراین، رابطه‌های (۸) و (۹) شرایط کافی برای برآورده شدن محدودیت سیگنال کنترل $\|u(t)\| \leq u_{max}$ هستند. اثبات مسأله طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین به اتمام رسید.

نتایج قضیه ۱ می‌تواند در کاربردهای زمان حقیقی برای دستیابی به اهداف کنترلی مورد نیاز مستقیماً مورد استفاده قرار گیرد. برای این منظور، در ادامه، یک الگوریتم عملی (شامل ۵ مرحله) برای پیاده‌سازی و تحقق روش کنترل پیش‌بین پیشنهادی مطرح می‌شود:

الگوریتم ۱: طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم

مرحله ۱: مقداردهی پارامترهای u_{max} ، L_p ، Q ، R ، A_j و B_j به ازای $j = 1, 2, \dots, 2^p$

مرحله ۲: تعیین و تشخیص زمان‌های t_k و گرفتن مقدار $x(t_k)$

مرحله ۳: حل آنالین مسأله کمینه‌سازی عددی ارائه شده در قضیه ۱

مرحله ۴: به‌روزرسانی بهره کنترل‌کننده $K = YX^{-1}$

مرحله ۵: بازگشت به مرحله ۲

بدیهی است که با اجرای مراحل فوق، برای سیستم دارای عدم قطعیت و محدودیت در سیگنال ورودی، کنترل پیش‌بین مقاوم حاصل خواهد شد.

نکته ۱: در تابع هزینه (۷) ممکن است ماتریس‌های وزنی Q و یا R منفرد باشند، در این صورت می‌توان رابطه (۱۰) را با نامساوی (۳۷) جایگزین نمود:

$$\begin{bmatrix} XA_j^T + A_jX + B_jY + Y^T B_j^T + \rho I_n & L_P X & Y^T R^{\frac{1}{2}} & XQ^{\frac{1}{2}} \\ L_P X & -\rho I_n & 0 & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 & -\gamma I_m & 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} X & 0 & 0 & -\gamma I_n \end{bmatrix} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2^p \quad (37)$$

نکته ۲: مسأله مطرح شده در قضیه ۱ می‌تواند برای سیگنال مرجع غیر صفر (نقطه تعادل غیر صفر $\bar{x} \neq 0$) استفاده شود. اگر در سیستم دارای عدم قطعیت (۱)، بخواهیم یک خروجی دلخواه $y = Cx$ ، یک سیگنال مرجع ثابت غیر صفر r را دنبال کند، آنگاه در حالت ماندگار خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A(\theta)\bar{x} + f(\bar{x}, t) + B(\theta)\bar{u} = 0 \\ C\bar{x} = r \end{cases} \quad (38)$$

در رابطه (۳۸)، متغیرهای \bar{x} و \bar{u} به ترتیب حالت ماندگار بردارهای حالت و بردار ورودی کنترل است. با تعریف متغیرهای جدید $\xi \stackrel{\text{def}}{=} x - \bar{x}$ و $v \stackrel{\text{def}}{=} u - \bar{u}$ داریم:

$$\frac{d\xi}{dt} = A(\theta)\xi + f_N(\xi, t) + B(\theta)v \quad (39)$$

لازم به ذکر است که در معادله دیفرانسیل (۳۹)، تابع غیرخطی با رابطه $f_N(\xi, t) = f(\xi + \bar{x}, t) - f(\bar{x}, t)$ جایگزین می‌شود. یک تابع هزینه برای این مسأله می‌تواند به صورت (۴۰) انتخاب شود:

$$J(u) = \int_{t_k}^{+\infty} ((C\hat{x}(\tau|t_k) - r)^T \bar{Q} (C\hat{x}(\tau|t_k) - r) + (\hat{u}(\tau|t_k) - \bar{u})^T R (\hat{u}(\tau|t_k) - \bar{u})) d\tau \quad (40)$$

تابع هزینه به فرم (۴۱) بازنویسی می‌شود:

$$J(u) = \int_{t_k}^{+\infty} (\hat{\xi}^T(\tau|t_k) C^T \bar{Q} C \hat{\xi}(\tau|t_k) + \hat{v}^T(\tau|t_k) R \hat{v}(\tau|t_k)) d\tau \quad (41)$$

بنابراین با انتخاب ماتریس $Q = C^T \bar{Q} C$ ، نتایج قضیه ۱ همچنان برقرار است. در این شرایط قانون کنترل به صورت (۴۲) است:

$$u = Kx + \bar{u} - K\bar{x} \quad (42)$$

نکته ۳: در سیستم دینامیکی (۱)، به منظور طراحی قانون کنترل مبتنی بر LMI ، دو نوع عدم قطعیت زیر در نظر گرفته شده است:

الف) عدم قطعیت جمع‌شونده به خاطر نامعلوم بودن تابع $f(x, t)$

ب) عدم قطعیت چندوجهی به خاطر نامعلوم بودن بردار θ

بدیهی است که اگر هر کدام از عدم قطعیت‌ها در سیستم دینامیکی (۱) حضور نداشته باشند (ماتریس‌های A و B معلوم باشد یا تابع غیرخطی $f(x, t)$ نداشته باشیم)، آنگاه نتایج ذکر شده در قضیه ۱ همچنان معتبر خواهند بود.

نکته ۴: مسأله کمینه‌سازی ذکر شده در قضیه ۱ بایستی بلادرنگ (در زمان حقیقی^۱) حل شده و سپس پارامترهای سیستم کنترل به‌روزرسانی شوند. حالت خاصی از مسأله مطرح شده در این مطالعه، انتخاب $t_k = t_0$ به تنهایی است. در این صورت، حل عددی مسأله کمینه‌سازی در قضیه ۱، با انجام محاسبات برون-خط^۲ به یک کنترل بهینه مقاوم منجر خواهد شد.

نکته ۵: برای سیستم غیرخطی دارای عدم قطعیت (۱)، با فرض‌های ۱ تا ۳ می‌توان یک کنترل بهینه مقاوم طراحی نمود. بدین منظور تابع هزینه مربعی (۴۳) انتخاب می‌شود:

$$J(u) = \int_{t_0}^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (43)$$

در این شرایط اگر اعداد مثبت ρ و γ ، ماتریس مثبت معین $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و ماتریس $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ به گونه‌ای یافت شوند که مسأله کمینه‌سازی زیر دارای جواب باشد:

$\min \gamma$

$$\begin{bmatrix} X & x(t_0) \\ x^T(t_0) & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y^T \\ Y & u_{max}^2 I_m \end{bmatrix} \geq 0 \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} XA_j^T + A_jX + B_jY + Y^TB_j^T + \rho I_n & L_pX & Y^T & X \\ & L_pX & -\rho I_n & 0 \\ & Y & 0 & -\gamma R^{-1} \\ & X & 0 & -\gamma Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2^p \quad (46)$$

آنگاه، با انتخاب قانون کنترل فیدبک حالت به فرم $u(t) = Kx(t)$ و بهره $K = YX^{-1}$ ، سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی خواهد شد. عدد مثبت γ ، کران بالای تابع هزینه (۴۳) است. در رابطه (۴۴)، عبارت $x(t_0)$ بیانگر شرایط اولیه سیستم غیرخطی (۱) است.

۴- شبیه‌سازی عددی

یک سیستم مرتبه دوم غیرخطی دارای عدم قطعیت با معادله دیفرانسیل (۴۷) توصیف شده است:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 2\beta)\frac{dy}{dt} + (3\beta - 2)y + g(y) = (2 - \beta)u \quad (47)$$

در سیستم دینامیکی (۴۷)، دو نوع عدم قطعیت چندوجهی و جمع‌شونده هم‌زمان وجود دارد. بنابراین، تابع $g(y)$ و همچنین پارامتر β نامعلوم هستند و داریم: $0 \leq \beta \leq 1$. در شبیه‌سازی عددی تابع غیرخطی $g(y) = \frac{y \sin(y)}{4 + y^2}$ و پارامتر $\beta^* = 0.9$ انتخاب می‌شود.

^۱Real-time

^۲Off-line

برای تابع غیرخطی $g(y)$ ، همواره نامساوی $|g(y)| < 0.18|y|$ برقرار است. پس ثابت لیب‌شیتز $L_p = 0.18$ خواهد بود. با انتخاب بردار حالت $x = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$ ، سیستم مرتبه دوم (۴۷) را می‌توان به فرم فضای حالت زیر نوشت:

$$\frac{dx}{dt} = A(\beta)x + f(x, t) + Bu \quad (48)$$

که در آن داریم:

$$A(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - 3\beta & 2\beta - 1 \end{bmatrix}, \quad f(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(x_1) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 - \beta \end{bmatrix}$$

در سیستم غیرخطی دارای عدم قطعیت (۴۷)، محدودیت سیگنال ورودی $|u(t)| \leq 3$ در نظر گرفته شده است. پس در سیستم پیوسته‌زمان (۴۷)، ماتریس‌های A و B به فرم زیر هستند:

$$A = \beta A_1 + (1 - \beta)A_2, \quad B = \beta B_1 + (1 - \beta)B_2$$

در نتیجه ماتریس‌های A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2 به صورت زیر هستند:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین، در سیستم پیوسته‌زمان (۴۸)، پارامتر β نامعلوم بوده و در نامساوی $0 \leq \beta \leq 1$ صدق می‌کند. در تابع هزینه (۷)، ماتریس‌های وزنی Q و R به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$Q = I_2, \quad R = 10$$

به منظور بررسی کارآمدی قانون کنترل ذکر شده در قضیه ۱، کنترل پیشنهادی با روش LQR و کنترل پیش‌بین [۱۶] مقایسه می‌شود. در کنترل پیش‌بین [۱۶] یک کنترل‌کننده دینامیکی در لحظات مختلف با دوره تناوب ۱ ثانیه، برای سیستم پیوسته‌زمان (۴۷) طراحی شده است. در معادله دیفرانسیل (۴۸)، با قرار دادن $f(x, t) = 0$ و مقدار $\beta = \frac{1}{2}$ می‌توان به سیستم نامی رسید. پس، سیستم نامی با معادله (۴۹) بیان می‌شود:

$$\frac{dx}{dt} = \bar{A}x + \bar{B}u \quad (49)$$

در رابطه (۴۹) خواهیم داشت:

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

با داشتن سیستم نامی، می‌توان یک قانون کنترل فیدبک حالت LQR طراحی کرد. بدین منظور، با استفاده از ماتریس‌های معلوم (\bar{A}) ، (\bar{B}) ، Q و R معادله ریکاتی جبری حل می‌شود؛ در نتیجه، بهره کنترل‌کننده فیدبک $u = K_{LQR}x$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_{LQR} = [-0.7928 \quad -1.0757]$$

با بکارگیری قانون کنترل بیان شده در قضیه ۱، با دوره تناوب ۱ ثانیه، بهره کنترل‌کننده فیدبک بدست می‌آید. بهره کنترل فیدبک در زمان ابتدایی به صورت زیر محاسبه شده است:

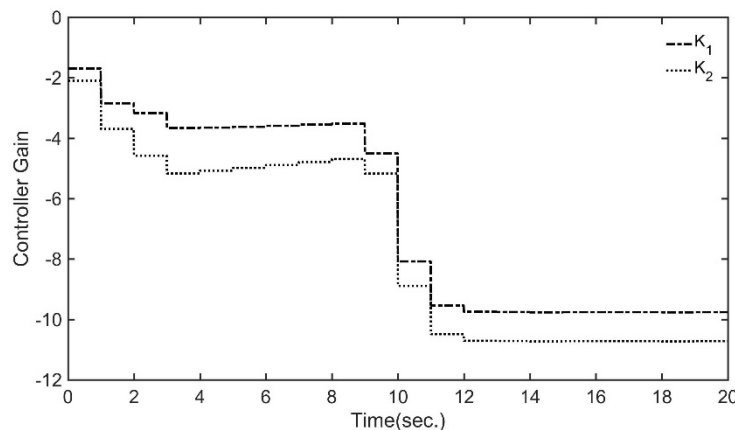
$$K = [-1.0493 \quad -1.4483]$$

بهره کنترل کننده $K(t)$ با روش ارائه شده محاسبه و در شکل ۱ نشان داده شده است. در محیط شبیه‌ساز، به منظور شبیه‌سازی سیستم غیرخطی (۴۷)، زمان انتگرال‌گیری، ۱ میلی ثانیه و همچنین شرایط اولیه $x_0 = [1 \ 0]^T$ انتخاب می‌شوند. در هر سه روش (کنترل پیشنهادی، کنترل پیش‌بین [۱۶] و LQR)، قانون کنترل به گونه‌ای طراحی می‌شود که تابع هزینه (۵۰) کمینه شود:

$$J(K) = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (50)$$

به منظور بررسی کارایی و مقایسه عملکرد سیستم حلقه بسته، مقدار تابع (۵۰) برای هر سه کنترل کننده (کنترل پیشنهادی، کنترل پیش‌بین [۱۶] و روش LQR) محاسبه و در جدول ۱ مقایسه شده است. پاسخ حالت‌های سیستم $x(t)$ دارای عدم قطعیت (۴۷)، در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است. سیگنال کنترل $u(t)$ اعمال شده به سیستم دینامیکی (۴۷)، در شکل ۴ آورده شده است.

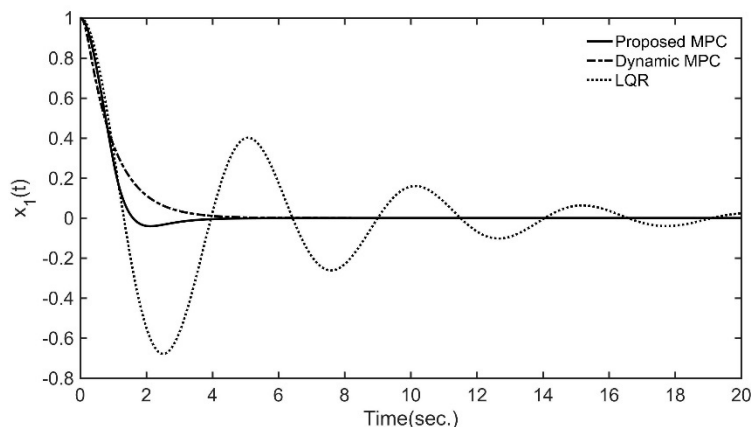
اثر بخشی کنترل کننده ارائه شده در مقایسه با LQR و کنترل پیش‌بین [۱۶] در جدول ۱ و در شکل‌های ۲ تا ۴ دیده می‌شود. مطابق شکل ۵، مدت زمان صرف شده برای حل مسأله کمینه‌سازی، حداکثر ۰/۳ ثانیه است. پس زمان موردنیاز برای انجام محاسبات در مقایسه با زمان نمونه‌برداری (۱ ثانیه) کوچک است. بنابراین الگوریتم ارائه شده در قضیه ۱، سرعت محاسبات برخط قابل قبولی دارد و در کاربردهای عملی می‌تواند به صورت بلادرنگ مورد استفاده قرار گیرد.



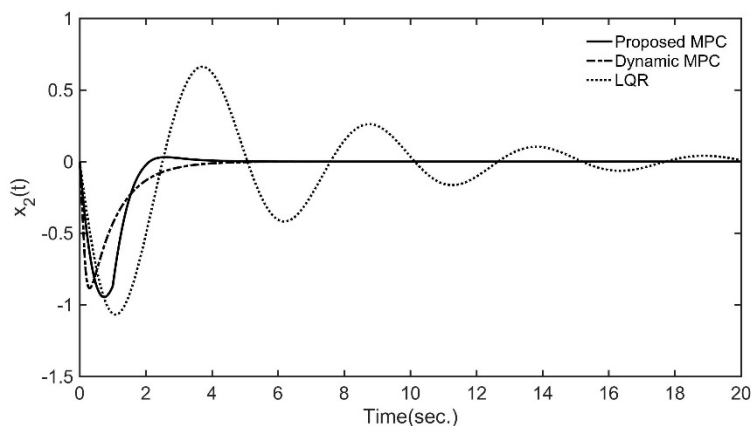
شکل ۱. بهره کنترل کننده $K(t)$ محاسبه شده با روش پیشنهادی.

جدول ۱. مقایسه شاخص عملکرد کنترل کننده پیش‌بین ارائه شده با روش‌های موجود.

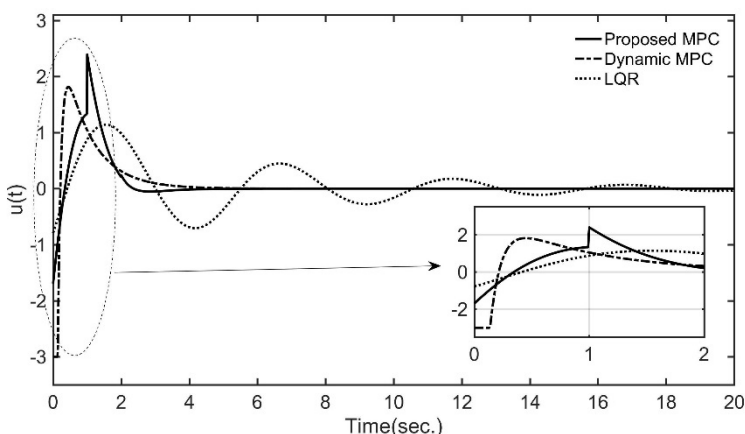
شاخص عملکرد	کنترل پیشنهادی	کنترل پیش‌بین [۱۶]	LQR
$J(K)$	۲۵/۳۸۸۴	۲۷/۰۱۴۲	۳۱/۹۰۷۸



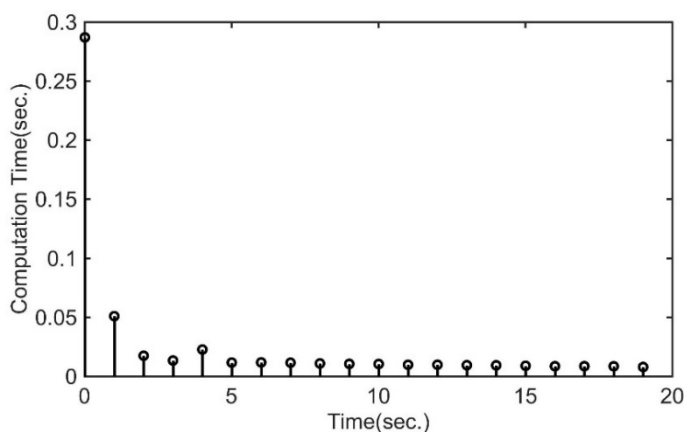
شکل ۲. پاسخ حالت $x_1(t)$ در سیستم دارای عدم قطعیت (۴۷).



شکل ۳. پاسخ حالت $x_2(t)$ در سیستم دارای عدم قطعیت (۴۷).



شکل ۴. سیگنال کنترل $u(t)$ در سیستم دارای عدم قطعیت (۴۷).



شکل ۵. زمان لازم برای حل مسأله بهینه‌یابی با الگوریتم پیشنهادی.

برای انجام شبیه‌سازی تنها با لحاظ نمودن شرایط $0 \leq \beta \leq 1$ و $|g(y)| < L_p|y|$ ، هر مقداری برای β و $g(y)$ می‌توان در نظر گرفت. اگر چه در شبیه‌سازی تابع غیرخطی $g(y) = \frac{y \sin(y)}{4+y^2}$ و پارامتر $\beta^* = 0.9$ انتخاب شد؛ اما، در قانون کنترل پیشنهادی نیازی به مقدار دقیق β و تابع $g(y)$ نیست. بنابراین، الگوریتم کنترل ارائه شده مستقل از مقادیر β و $g(y)$ بوده و نسبت به نامعینی‌های ذکر شده مقاوم است. در قضیه ۱، به لحاظ نظری دیده شد که در روش کنترل پیش‌بین مقاوم پیشنهادی، عدم قطعیت‌های سیستم (جمع‌شونده و چندوجهی) و محدودیت سیگنال ورودی $|u(t)| \leq 3$ در طراحی قانون کنترل لحاظ می‌شود. در شبیه‌سازی عددی نیز کارآمدی روش مطرح شده در قضیه ۱ در مقایسه با روش‌های کنترل موجود نشان داده شد.

۵- نتیجه‌گیری

در یک سیستم دینامیکی دارای دو نوع عدم قطعیت (جمع‌شونده و چندوجهی)، با در نظر گرفتن محدودیت در سیگنال ورودی، به طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم پرداخته شد. برای دستیابی به این هدف، ابتدا با وجود عدم قطعیت‌های جمع‌شونده و چندوجهی، مسأله کنترل در یک سیستم پیوسته‌زمان به طریق مناسب فرمول‌بندی شد. یک قانون کنترل به فرم فیدبک حالت (دارای بهره ثابت) انتخاب شد. در نتیجه، مسأله طراحی قانون کنترل پیش‌بین به انتخاب بهینه بهره کنترل فیدبک حالت منجر شد. از این رو، مسأله طراحی کنترل مقاوم به یک مسأله کمینه‌سازی با قیدهای نامساوی ماتریسی تبدیل شد. از حل عددی این مسأله، در لحظه موردنظر، بهره قانون کنترل فیدبک حالت تعیین خواهد شد. روش کنترل بدست آمده در یک سیستم مرتبه دوم غیرخطی دارای دو نوع عدم قطعیت شبیه‌سازی شد. سپس، عملکرد روش کنترل پیشنهادی با روش LQR و یک کنترل پیش‌بین موجود مقایسه شد. نتایج شبیه‌سازی انجام شده در یک سیستم دارای عدم قطعیت و محدودیت ورودی، اثر بخشی روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های موجود را نشان داد.

برای ادامه کار پیشنهاد می‌شود محدودیت‌های فیزیکی و عملی از قبیل تأثیر تأخیر زمانی (تأخیر عملگر و تأخیر در سنسور اندازه‌گیری)، خطای کوانتیزاسیون، اثرات غیرخطی عملگر، وجود ناحیه مرده و تغییرات مجاز سیگنال ورودی سیستم در طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم لحاظ شود. سپس مسأله کنترل با رویکرد LMI فرمول‌بندی شود و قانون کنترل مقاوم استخراج شود. در این مطالعه، از جعبه‌ابزار $LMILab$ برای حل مسأله کمینه‌سازی استفاده شد. برای بهبود عملکرد روش ارائه شده، توصیه می‌شود مدت زمان لازم برای رسیدن به جواب بهینه، با الگوریتم‌های عددی مختلف بررسی و حل‌کننده مناسب تعیین شود.

مراجع

- [1] F. L. Lewis, D. Vrabie, and V. L. Syrmos, Optimal control: John Wiley & Sons, 2012.
- [2] C. Chen and A. Holohan, "Stability robustness of linear quadratic regulators," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 26, pp. 1817-1824, 2016.
- [3] O. U. Rehman, B. Fidan, and I. R. Petersen, "Uncertainty modeling and robust minimax LQR control of multivariable nonlinear systems with application to hypersonic flight," Asian Journal of Control, vol. 14, pp. 1180-1193, 2012.
- [4] L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu, Advances in linear matrix inequality methods in control: SIAM, 2000.
- [5] H. Eliasi and S. Rahmati, "Robust Model Predictive Control for a Class of Discrete Nonlinear systems," Journal of Nonlinear Systems in Electrical Engineering, vol. 6, pp. 104-118, 2020.
- [6] V. Ghaffari, S. V. Naghavi, and A. Safavi, "Robust model predictive control of a class of uncertain nonlinear systems with application to typical CSTR problems," Journal of Process Control, vol. 23, pp. 493-499, 2013.
- [7] D. C. Ramos and P. L. Peres, "An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, pp. 675-678, 2002.
- [8] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, pp. 896-911, 1997.
- [9] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," Automatica, vol. 32, pp. 1361-1379, 1996.
- [10] F. A. Cuzzola, J. C. Geromel, and M. Morari, "An improved approach for constrained robust model predictive control," Automatica, vol. 38, pp. 1183-1189, 2002.
- [11] M. S. Asadinia and T. Binazadeh, "Stabilization of Time Varying Delay Singular Systems Subject to Actuator Saturation," Tabriz Journal of Electrical Engineering, vol. 47, pp. 843-855, 2017.

- [12] Q. Hu, J. Xie, and C. Wang, "Dynamic path planning and trajectory tracking using MPC for satellite with collision avoidance," *ISA Transactions*, vol. 84, pp. 128-141, 2019.
- [13] J. Holaza, M. Klaučo, J. Drgoňa, J. Oravec, M. Kvasnica, and M. Fikar, "MPC-based reference governor control of a continuous stirred-tank reactor," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 108, pp. 289-299, 2018.
- [14] N. Mohammad, A. Azman, M. Marzaki, R. Adnan, N. Ismail, and M. Rahiman, "Comparison between MPC and PID control for compact hydro distillation process," *Journal of Fundamental and Applied Sciences*, vol. 9, pp. 77-93, 2017.
- [15] A. Bonfiglio, F. Cantoni, A. Oliveri, R. Procopio, A. Rosini, M. Invernizzi, et al., "An MPC-based approach for emergency control ensuring transient stability in power grids with steam plants," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 66, pp. 5412 - 5422, 2018.
- [16] V. Ghaffari, "A robust control system scheme based on model predictive controller (MPC) for continuous-time systems," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 38, pp. 1032-1041, 2017.
- [17] L. Xiaohua and H. Chunyan, "Robust model predictive control of continuous uncertain systems," *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 21, pp. 267-275, 2008.
- [18] R. Wang and J. Bao, "A differential Lyapunov-based tube MPC approach for continuous-time nonlinear processes," *Journal of Process Control*, vol. 83, pp. 155-163, 2019.
- [19] E. F. Camacho and C. B. Alba, *Model predictive control: Springer Science & Business Media*, 2013.
- [20] L. Zhang, W. Xie, and J. Liu, "Robust control of saturating systems with Markovian packet dropouts under distributed MPC," *ISA Transactions*, vol. 85, pp. 49-59, 2019.
- [21] Z. Sun, L. Dai, K. Liu, D. V. Dimarogonas, and Y. Xia, "Robust self-triggered MPC with adaptive prediction horizon for perturbed nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 64, pp. 4780-4787, 2019.
- [22] M. Zamanian and A. Keymasi Khalaji, "Trajectory tracking and stabilization control of a wheeled robot using predictive algorithm," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 17, pp. 167-175, 2017.
- [23] M. Khosrowjerdi, "Mixed H_2/H_∞ approach to fault-tolerant controller design for Lipschitz non-linear systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, pp. 299-307, 2011.
- [24] J. Fleming, B. Kouvaritakis, and M. Cannon, "Robust tube MPC for linear systems with multiplicative uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, pp. 1087-1092, 2015.
- [25] C. Scherer and S. Weiland, *Linear matrix inequalities in control*. Delft, The Netherlands: Dutch Institute for Systems and Control, 2000.
- [26] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 2003.