

# توافق تطبیقی مبتنی بر رویت گره‌های توزیع شده در سیستم چندعاملی غیرخطی در حضور اشباع ورودی و ترم‌های نایقینی

ناهد رحیمی<sup>۱</sup> و طاهره بینازاده<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکترا- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران،  
n.rahimi@sutech.ac.ir  
<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استاد؛ دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران،  
binazadeh@sutech.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۸/۱۲)



دانشگاه صنعتی شیراز

DOR:

[20.1001.1.23223146.1400.8.1.2.1](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1400.8.1.2.1)

نشریه علمی غیرخطی در مهندسی برق

دوره ۸ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۰

صفحات ۱۵۵ الی ۱۷۸

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

## چکیده

### واژه‌های کلیدی

در این مقاله به طراحی کنترل کننده های تطبیقی توزیع شده مبتنی بر رویت گر، به منظور دست یابی به توافق خروجی رهبرمخورد در سیستم های چند عاملی غیرخطی مرتبه بالا در حضور قید اشباع ورودی نامتقارن و عدم قطعیت های سیستم پرداخته شده است. همچنین، در معادلات دینامیکی عامل های پیرو ترم های غیرخطی که ناشی از ساده سازی مدل، عدم قطعیت پارامترها و اغتشاشات خارجی می باشند، در نظر گرفته شده اند. به منظور کاهش محافظه کاری، کران بالای ترم های نامعلوم به عنوان ثابت های نامشخص فرض شده اند که از طریق قوانین تطبیقی به دست می آیند. علاوه بر این فرض می شود که تمام متغیرهای حالت عامل ها به طور مستقیم قابل اندازه گیری نمی باشند. بنابراین، ابتدا با طراحی رویت گره های غیرخطی توزیع شده، متغیرهای حالت عامل ها تخمین زده می شوند و سپس با استفاده از رویکرد مد لغزشی، قوانین کنترلی تطبیقی توزیع شده مبتنی بر رویت گر به نحوی طراحی می شوند که توافق خروجی بین عامل ها را تضمین کنند و خروجی عامل های پیرو بتوانند در حضور ترم های نایقینی و محدودیت اشباع نامتقارن ورودی، خروجی عامل رهبر را ردیابی کنند. در انتها نتایج شبیه سازی ها دستاوردهای قوانین پیشنهادی ارائه شده را کاملاً تایید می کنند.

توافق خروجی،

سیستم های چند عاملی،

رویت گره های غیرخطی توزیع شده،

کنترل مد لغزشی تطبیقی،

قید اشباع نامتقارن ورودی.



Sahand University  
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1400.8.1.2.1](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1400.8.1.2.1)

Journal of Nonlinear  
Systems in Electrical  
Engineering

Vol.8, No.1

Spring and Summer 2021

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

# Adaptive Consensus based on Distributed Observers for Nonlinear Multi-Agent System with Input Saturation and Uncertain Terms

Nahid Rahimi<sup>1</sup> and Tahereh Binazadeh<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ph.D. Student, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, [n.rahimi@sutech.ac.ir](mailto:n.rahimi@sutech.ac.ir)

<sup>2</sup>**Corresponding Author**, Professor, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, [binazadeh@sutech.ac.ir](mailto:binazadeh@sutech.ac.ir)

## ABSTRACT

### Keywords

Output Consensus, Multi-agent systems,

Nonlinear distributed observers,

Adaptive sliding-mode,

Non-symmetric input saturation constraint.

This paper considers the design of observer-based distributed adaptive controllers to achieve a leader-follower output consensus for high-order nonlinear multi-agent systems at the presence of non-symmetric input saturation constraint and system uncertainties. Moreover, in the dynamic equations of the follower, nonlinear unknown terms that are due to model simplification, uncertainty of parameters or external perturbations are considered. In order to reduce the conservatism, the upper bound of the uncertain term is considered to be unknown, which is obtained by adaptive laws. In addition, it is assumed that all states variables of agents are not directly measurable; therefore firstly, by designing the nonlinear distributed observers, the states variables of agents are estimated. Then, by using the sliding mode technique, the observer-based distributed adaptive control laws are designed to ensure the output consensus between the agents, and the output of the followers can track the output of the leader, at the presence of non-symmetric input saturation and uncertain terms. Finally, the results of the simulations completely confirm the achievements of the proposed laws.

## ۱ - مقدمه

در سال‌های اخیر سیستم‌های چند عاملی به علت کاربردهای فراوانشان بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. سیستم‌های چند عاملی دسته‌ای خاص از سیستم‌های پیچیده محسوب می‌شوند که به سبب ویژگی‌هایی که دارند در مدل‌سازی دسته‌ی وسیعی از سیستم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. کاربرد و هدف به کارگیری سیستم‌های چند عاملی باعث به وجود آمدن زمینه‌های تحقیقاتی مختلفی از جمله آرایش‌بندی، مساله‌ی ملاقات در فضا، حرکت هماهنگ، ائتلاف، کنترل پوشش و توافق شده است. این زمینه‌ها از یکدیگر مستقل نیستند، در واقع ممکن است تا حدی همپوشانی داشته باشند. یکی از بحث‌های قابل توجه در مورد سیستم‌های چند عاملی، مساله‌ی توافق می‌باشد. توافق به رفتار گروهی اطلاق می‌شود که تمام عوامل به طور یکسان با یک پروتکل توزیع شده محلی به توافق عمومی مشترک دست می‌یابند. در حقیقت همگرا شدن عامل‌ها به یک مقدار مشخص، توافق یا سازش نام دارد [۱-۲]. از این رو تحقیقات پژوهشی مختلفی در راستای طراحی کنترل‌کننده به منظور حصول توافق صورت گرفته است. مساله‌ی توافق سیستم‌های چند عاملی قابلیت به کارگیری در زمینه‌های بسیاری از جمله جامعه‌شناسی [۳]، شبکه‌های قدرت [۴]، محاسبات موازی [۵]، زیست‌شناسی [۶]، شبکه‌های سنسوری [۷] و رباتیک [۸] را دارد. از دید کنترلی، مساله‌ی توافق شامل طراحی یک قانون کنترلی است که همگرایی بین عامل‌ها را تضمین کند. استراتژی یافتن یک قانون کنترلی که توافق را تضمین کند به عوامل مختلفی از جمله حالت توافق، دینامیک عامل‌ها و ... بستگی دارد [۹].

حالت توافق یکی از عوامل تاثیرگذار در طراحی قانون کنترلی می‌باشد. سیستم‌های چند عاملی از این رو به دو دسته‌ی رهبر محور و بدون رهبر تقسیم بندی می‌شوند. سیستم‌های چند عاملی رهبر محور به سیستم‌هایی گفته می‌شوند که مقدار مورد توافق عامل‌ها، متغیرهای حالت رهبر است و متغیرهای حالت عامل‌ها باید به متغیرهای حالت رهبر همگرا شوند [۱۰]. رهبر می‌تواند مجازی یا حقیقی باشد. در صورتی که یکی از عامل‌ها به عنوان رهبر در نظر گرفته شود، رهبر حقیقی می‌باشد؛ در این حالت بقیه‌ی عامل‌ها پیرو نامیده می‌شوند [۱۱]. همچنین رهبر می‌تواند مجازی باشد. مثلاً یک سیگنال مرجع را می‌توان به عنوان رهبر در نظر گرفت [۱۲]. در مساله‌ی کنترل توافق رهبر محور، رفتار رهبر بر روی عملکرد بقیه‌ی عامل‌ها (پیروها) به صورت مستقیم یا غیر مستقیم تاثیر می‌گذارد، اما خود از بقیه‌ی عامل‌ها تاثیر نمی‌پذیرد [۱۳].

از دیگر عوامل تاثیرگذار در طراحی قانون کنترلی به منظور دست‌یابی به مساله‌ی توافق در سیستم‌های چند عاملی، دینامیک عامل‌ها می‌باشد. سیستم‌های چند عاملی از این حیث به دو گروه سیستم‌های چند عاملی خطی و غیرخطی تقسیم بندی می‌شوند. سیستم‌های چند عاملی خطی به سیستم‌هایی گفته می‌شود که دینامیک عامل‌های آن خطی باشد. سیستم‌های چند عاملی غیرخطی به سیستم‌هایی گفته می‌شود که عامل‌های آن دینامیکی غیرخطی دارند. غیرخطی بودن یکی از ویژگی‌های سیستم‌های فیزیکی است و تقریباً تمامی سیستم‌های موجود در طبیعت غیرخطی هستند. همچنین پدیده‌هایی همچون نویز، اغتشاش و عدم قطعیت پارامترهای یک سیستم می‌تواند باعث غیرخطی شدن یک سیستم خطی شود. حل مساله‌ی توافق برای سیستم‌های چند عاملی غیرخطی بسیار پیچیده‌تر از سیستم‌های چند عاملی خطی می‌باشد [۱۴].

از دیگر ویژگی‌های سیستم‌های فیزیکی اشباع محرک می‌باشد که به دلیل محدودیت‌های فیزیکی عملگرهاست [۱۵، ۱۶]. اشباع بر روی عملکرد کنترل‌کننده به شدت تاثیر می‌گذارد و یک سیستم پایدار در حضور اشباع محرک می‌تواند به یک سیستم

ناپایدار تبدیل شود. از این رو مطالعه‌ی مساله‌ی توافق در حضور اشباع محرک مورد توجه محققان قرار گرفته است. در ادامه، مقالاتی که به حل مساله‌ی توافق در حضور اشباع محرک پرداخته‌اند، بررسی می‌شوند.

مساله توافق در حضور اشباع ورودی برای سیستم‌های خطی در مرجع [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. نویسندگان مراجع [۱۸-۱۹] به حل مساله توافق برای سیستم چند عاملی مرتبه دوم در حضور اغتشاش و اشباع ورودی پرداخته‌اند. حل مساله‌ی توافق برای سیستم‌های چند عاملی مرتبه‌ی دوم ناهمگون در حضور اشباع ورودی در مرجع [۲۰] بررسی شده است. نویسندگان در مرجع [۲۱] به حل مساله‌ی توافق سیستم‌های چند عاملی تاخیری مرتبه‌ی دوم با اشباع محرک پرداخته‌اند. همچنین برخی از مراجع، به حل مساله‌ی توافق در حضور اشباع ورودی با استفاده از رویکردهای تطبیقی پرداخته‌اند. به عنوان مثال، نویسندگان مرجع [۲۲-۲۳] حل مساله‌ی توافق برای سیستم‌های چند عاملی خطی در حضور اشباع محرک و اغتشاش خارجی با رویکرد تطبیقی را بررسی کرده‌اند. مساله توافق برای سیستم‌های چند عاملی مرتبه‌ی بالا با اشباع ورودی در مراجع [۲۴-۳۱] بحث شده است. در مراجع [۲۴-۲۶]، دینامیک عامل‌ها به صورت خطی و دلخواه فرض شده است. همچنین گراف ارتباطی جهت دار در نظر گرفته شده است. حل مساله‌ی توافق برای سیستم‌های چند عاملی مرتبه‌ی بالا که دارای ترم‌های غیر خطی و اغتشاش خارجی هستند، در مراجع [۲۷-۳۱] مورد بحث قرار گرفته است.

بر اساس پژوهش‌هایی که تاکنون صورت گرفته است، طراحی کنترل کننده مبتنی بر رویت گر به منظور حل مساله‌ی توافق با رویکرد تطبیقی برای سیستم‌های چند عاملی غیرخطی مرتبه بالا در حضور اشباع نامتقارن ورودی و ترم‌های نایقینی مورد بررسی قرار نگرفته است. هدف ما در این مقاله طراحی کنترل کننده تطبیقی توزیع شده مقاوم برای دستیابی به توافق رهبر محور در سیستم‌های چند عاملی غیرخطی مرتبه بالا است.

در این مقاله، یک سیستم چند عاملی غیرخطی با معادلات دینامیکی مرتبه بالا در نظر گرفته شده است. عبارت غیرخطی عامل‌های پیرو شامل یک جمله غیرخطی معلوم و لپشیتز و یک جمله غیرخطی نامعلوم است که ناشی از عدم قطعیت پارامترها یا ساده سازی مدل می‌باشد. اغتشاشات خارجی نیز در معادلات دینامیکی هر عامل در نظر گرفته شده‌اند. علاوه بر این، عامل‌های پیرو در معرض اشباع ورودی نامتقارن هستند و تمامی متغیرهای حالت قابل اندازه گیری مستقیم نمی‌باشند. همچنین برای جبران اثر عدم قطعیت‌های سیستم، به جای این که مطابق روش‌های کلاسیک کنترل مقاوم، حد بالایی عدم قطعیت‌های سیستم را به عنوان یک تابع مثبت مشخص در نظر گرفته شود، حدود بالای عدم قطعیت‌های سیستم به عنوان ثوابت مثبتی فرض می‌شوند که از طریق قوانین تطبیقی به دست می‌آیند. این رویکرد، محافظه کاری را به شدت کاهش می‌دهد و منجر به کاهش دامنه‌ی تابع علامت در قانون کنترلی می‌شود. برای این منظور، سطوح لغزش مناسبی پیشنهاد شده و کنترل کننده‌های مد لغزشی تطبیقی توزیع شده مبتنی بر رویت گر به گونه‌ای طراحی شده‌اند که توافق خروجی بین عوامل را علی‌رغم محدودیت اشباع نامتقارن ورودی و عدم قطعیت‌های مدل در معادلات دینامیکی هر عامل، تضمین می‌کنند. در این راستا قضیه‌ی ای ارائه شده و با استفاده از رویکرد لیانوفی ثابت شده است که علی‌رغم اشباع نامتقارن ورودی و عدم قطعیت‌های مدل، توافق خروجی حاصل خواهد شد و خطای توافق و خطای رویت گر به صفر همگرا می‌شوند. در نهایت، یک مثال کاربردی برای نشان دادن اثربخشی روش پیشنهادی ارائه شده است. نتایج شبیه سازی‌ها کاملاً دستاوردهای قانون پیشنهادی ارائه شده را تایید کرده‌اند. نوآوری‌های مقاله در مقایسه با مراجع موجود به صورت زیر خلاصه می‌شود:

- در مقایسه با مرجع [۱۷] عامل‌ها غیرخطی فرض شده‌اند.
- در مقایسه با مراجع [۱۸-۱۹] عامل‌ها با دینامیک دلخواه فرض شده است.
- در مقایسه با مراجع [۲۷-۳۱] رویکرد در نظر گرفته شده است.
- اشباع ورودی به صورت نامتقارن در مقاله حاضر لحاظ شده است.

ادامه مقاله به شرح زیر است: نظریه گراف در بخش دوم مرور شده است. در بخش سوم فرضیات مساله بیان شده است. قوانین کنترلی جهت حصول توافق خروجی و روند کامل اثبات در بخش چهارم مطرح شده است. نتایج شبیه سازی در بخش پنجم آمده است و در نهایت نتیجه گیری در بخش ششم ارائه شده است.

## ۲- تئوری گراف

یک سیستم چندعاملی از چند عامل خودگردان که با هم در ارتباط هستند، تشکیل می‌شود. نحوه‌ی ارتباط عامل‌ها که شامل رد و بدل کردن اطلاعات است می‌تواند متفاوت باشد. نحوه‌ی این ارتباطات با یک گراف  $G$  مدل می‌شود. در حقیقت گراف  $G$  بیان می‌کند که عامل‌ها چگونه با هم یا با رهبر (در سیستم‌های رهبر محور) در ارتباط هستند. گراف  $G(V, E, \bar{A})$  شامل سه عنصر  $V, E, \bar{A}$  است. عنصر  $V = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  نشان دهنده‌ی تعداد گره‌ها یا در حقیقت تعداد عامل‌ها می‌باشد. عنصر  $E$  از زوج  $(i, j)$  به صورت زیر تشکیل شده است:

به این صورت که  $(i, j) \in E$  اگر و فقط اگر عامل  $i$  بتواند از عامل  $j$  اطلاعات دریافت کند.  $E = \{(i, j), i, j \in V\}$

عنصر  $\bar{A}$  یک ماتریس  $N \times N$  است که اعضای این ماتریس نشانگر وجود یا عدم وجود ارتباط بین یک عامل و دیگر عامل‌ها است. ماتریس  $\bar{B}$  برابر است با  $\bar{B} = \text{diag}\{b^1, b^2, \dots, b^N\}$  که این ماتریس ارتباط بین عامل‌ها و رهبر را در سیستم‌های چند عاملی رهبر محور مشخص می‌کند. اگر عامل  $i$  با رهبر در ارتباط باشد  $b^i = 1$  و در غیر این صورت  $b^i = 0$  می‌باشد.

**فرض ۱:** ماتریس  $\bar{B}$  نمی‌تواند صفر باشد و حداقل یکی از عامل‌های پیرو باید با عامل رهبر در ارتباط باشد.

## ۳- فرضیات مساله

یک سیستم چند عاملی که شامل یک عامل رهبر و  $N$  عامل پیرو است را در نظر بگیرید. معادلات دینامیکی عامل رهبر که با بالا نویس ۰ مشخص شده‌اند به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \dot{x}_m^0 = x_{m+1}^0 & m = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n^0 = u^0 \\ y^0 = x_1^0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $x^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0] \in D \subseteq R^n$  بردار حالت،  $u^0 \in R$  سیگنال کنترلی و  $y^0 \in R$  خروجی رهبر می‌باشند. معادلات رهبر به فرم زیر نیز قابل بازنویسی می‌باشند:

$$\begin{cases} \dot{x}^0 = Ax^0 + Bu^0 \\ y^0 = Cx^0 \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $x^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0] \in D \subseteq R^n$  بردار حالت و  $y^0 \subseteq R$  خروجی رهبر می‌باشد. همچنین بردار  $u^0 \subseteq R$  سیگنال کنترلی رهبر می‌باشد که با تنظیم مناسب آن عملکرد دلخواه رهبر حاصل می‌شود. همچنین بردارهای  $C = [1, 0, \dots, 0] \subseteq R^n$ ،  $B = [0, \dots, 1]^T \subseteq R^n$  و ماتریس  $A$  یک ماتریس مربعی به صورت زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

معادلات دینامیکی عامل‌های پیرو به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \dot{x}_m^i = x_{m+1}^i & m=1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n^i = f_n^i(x^i, t) + \Delta f_n^i(x^i, t) + \delta_n^i(t) + \beta \phi(u^i(t)) \\ y^i = x_1^i \end{cases} \quad (۴)$$

در این مقاله مقدار متغیر  $i$  نشان دهنده تعداد عامل‌ها  $i=1, 2, \dots, N$  می‌باشد  $i=1, 2, \dots, N$ . همچنین  $f_n^i \in R$  عبارت غیرخطی و معلوم مربوط به عامل  $i$  ام می‌باشند.  $\Delta f_n^i \in R$  عبارت غیرخطی و نامشخص می‌باشد که ناشی از ساده سازی مدل و عدم قطعیت پارامترها می‌باشد و  $\delta_n^i \in R$  نشانگر اغتشاشات خارجی وارد بر عامل  $i$  ام می‌باشد.  $u^i(t) \in R$  سیگنال کنترلی و  $y^i \in R$  خروجی عامل  $i$  ام می‌باشند.  $\beta$  ضریب سیگنال کنترلی می‌باشد و یک مقدار ثابت غیر صفر می‌باشد. همچنین تابع اشباع نامتقارن ورودی  $\phi(u^i(t))$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$\phi(u^i(t)) = \begin{cases} u_H^i & u^i(t) > u_H^i \\ u^i(t) & -u_L^i \leq u^i(t) \leq u_H^i \\ -u_L^i & u^i(t) < -u_L^i \end{cases} \quad (۵)$$

که  $u_H^i$  و  $u_L^i$  اعداد مثبتی می‌باشند و  $u_H^i$  و  $-u_L^i$  حدود بالا و پایین اشباع در محرک  $i$  ام می‌باشند. تابع بیان شده در معادله‌ی (۵) می‌تواند به صورت زیر بیان شود: [۳۲-۳۳]

$$\phi(u^i(t)) = \omega^i(u^i(t))u^i(t) \quad (۶)$$

که

$$\omega^i(u^i(t)) = \begin{cases} \frac{u_H^i}{u^i(t)} & u^i(t) \geq u_H^i \\ 1 & -u_L^i \leq u^i(t) \leq u_H^i \\ \frac{-u_L^i}{u^i(t)} & u^i(t) \leq -u_L^i \end{cases} \quad (7)$$

از رابطه‌ی (۷) نتیجه می‌شود که:

$$0 < \omega^i(u^i(t)) \leq 1 \quad (8)$$

**تذکره ۱:** طبق خاصیت چگالی اعداد حقیقی همواره یک مقدار ثابت  $\xi^i$  وجود دارد به نحوی که در معادله‌ی زیر صدق کند [۳۴]:

$$0 < \xi^i < \omega^i(u^i(t)) \leq 1 \quad \forall u^i(t), t \in [0, \infty] \quad (9)$$

معادلات دینامیکی عامل‌های پیرو نیز به صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشند:

$$\begin{cases} \dot{x}^i = Ax^i + F^i(x^i, t) + \Delta F^i(x^i, t) + \bar{\delta}^i(t) + Bu^i \\ y^i = Cx^i \end{cases} \quad (10)$$

که در آن  $x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i] \in D \subseteq R^n$  بردار حالت و  $F^i = [0, 0, \dots, f_n^i] \subseteq R^n$  بردار تابع غیرخطی معلوم عامل  $i$  ام می‌باشد. بردارهای  $\Delta F^i = [0, 0, \dots, \Delta f_n^i] \subseteq R^n$  و  $\bar{\delta}^i = [0, 0, \dots, \delta_n^i] \subseteq R^n$  به ترتیب نمایانگر بردار تابع غیرخطی نامعلوم و بردار اغتشاشات خارجی عامل  $i$  ام می‌باشند.  $u^i \subseteq R$  و  $y^i \subseteq R$  به ترتیب سیگنال کنترلی و بردار خروجی عامل  $i$  ام، می‌باشند. همچنین بردارهای  $B = [0, \dots, \beta]^T \subseteq R^n$ ،  $C = [1, 0, \dots, 0] \subseteq R^n$ ، و ماتریس  $A$  یک ماتریس مربعی به صورت رابطه‌ی (۳) می‌باشد.

**فرض ۲:** نرم بردارهای غیرخطی و نامعلوم  $\Delta F^i$  و  $\bar{\delta}^i$  کران‌دار می‌باشند و در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\|\Delta F^i(x^i, t)\| + \|\bar{\delta}^i(t)\| < \Lambda^i \quad (11)$$

که  $\Lambda^i$  پارامترهای مثبتی هستند که توسط قوانین تطبیقی بدست می‌آیند.

**فرض ۳:** بردار غیرخطی و معلوم  $F^i$  با ثابت  $L^i$  لیبشیتز می‌باشد و در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\|F^i(x^i, t) - F^i(\bar{x}^i, t)\| < L^i \|x^i - \bar{x}^i\| \quad (12)$$

در این مقاله هدف دستیابی به توافق خروجی می‌باشد. از آن جا که متغیرهای حالت عامل‌ها در دسترس نمی‌باشند، ابتدا باید با استفاده از رویت گره‌های توزیع شده، متغیرهای حالت هر عامل تخمین زده شوند و سپس با استفاده از تخمین متغیرهای حالت هر عامل، کنترل کننده‌های توزیع شده طراحی شوند. در ادامه به طراحی رویت گره‌های توزیع شده پرداخته می‌شود.

### طراحی رویت گره‌های توزیع شده

در این مرحله برای هر یک از عامل‌ها، رویت‌گر مناسب طراحی شده است. با توجه به تعریف بیان شده برای ماتریس‌های  $A, C$ ، زوج  $(A, C)$  کاملاً رویت‌پذیر است. بنابراین رویت‌گر عامل رهبر به صورت زیر طراحی شده است:

$$\begin{cases} \hat{x}^0 = A\hat{x}^0 + K(y^0 - \hat{y}^0) + Bu^0 \\ \hat{y}^0 = C\hat{x}^0 \end{cases} \quad (13)$$

رویت گر مربوط به هر یک از عامل‌های پیرو نیز به صورت زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$\begin{cases} \hat{x}^i = A\hat{x}^i + F^i(\hat{x}^i, t) + K(y^i - \hat{y}^i) + Bu^i \\ \hat{y}^i = C\hat{x}^i \end{cases} \quad (14)$$

که در آن  $\hat{x}^0 = [\hat{x}_1^0, \hat{x}_2^0, \dots, \hat{x}_n^0] \in D \subseteq R^n$  و  $\hat{x}^i = [\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i, \dots, \hat{x}_n^i] \in D \subseteq R^n$  به ترتیب بردار تخمین متغیر حالت عامل رهبر و عامل‌های پیرو می‌باشند. بردار  $K = [k_1, \dots, k_n]^T \in R^{n \times 1}$  بهره‌ی رویت گر می‌باشد و باید به نحوی طراحی گردد که ماتریس  $(A - KC)$  هرویتز باشد. همچنین بر اساس ایده‌ی رویت گر با بهره‌ی بالا، بردار  $K$  باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود تا رویت گره‌های طراحی شده عملکرد مطلوبی داشته باشند. بر اساس معادله‌ی لیاپانوف برای هر ماتریس معین مثبت و متقارن  $Q$ ، ماتریس مثبت معین  $P$  وجود دارد به نحوی که:

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -Q \quad (15)$$

معادلات رویت گره‌های طراحی شده برای عامل‌های رهبر و پیرو در روابط (۱۴) و (۱۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود.  
رویت گر عامل رهبر:

$$\begin{cases} \hat{x}_m^0 = \hat{x}_{m+1}^0 + k_m(y^0 - \hat{y}^0) \\ \hat{x}_n^0 = u^0 + k_n(y^0 - \hat{y}^0) \\ \hat{y}^0 = \hat{x}_1^0 \end{cases} \quad m=1,2,\dots,n-1 \quad (16)$$

و رویت گره‌های عامل‌های پیرو:

$$\begin{cases} \hat{x}_m^i = \hat{x}_{m+1}^i + k_m(y^i - \hat{y}^i) \\ \hat{x}_n^i = f_n^i(\hat{x}^i, t) + \beta\phi(u^i(t)) + k_n(y^i - \hat{y}^i) \\ \hat{y}^i = \hat{x}_1^i \end{cases} \quad (17)$$

که  $i=1,2,\dots,N$  و  $m=1,2,\dots,n-1$

خطای رویت گر رهبر و عامل‌های پیرو ( $z^i, z^0 \in R^n$ ) و خطای توافق  $e^i \in R^n$  به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$z^0 = x^0 - \hat{x}^0 \quad (18)$$

$$z^i = x^i - \hat{x}^i \quad (19)$$

$$e^i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(\hat{x}^i - \hat{x}^j) + b^i(\hat{x}^i - \hat{x}^0) \quad (20)$$

پارامترهای  $a_{ij}$  و  $b^i$  با توجه به روابط گراف بیان شده در بخش دوم بدست می‌آیند. همچنین  $z^0 = [z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0]^T$

$$e^i = [e_1^i, e_2^i, \dots, e_n^i]^T, \quad z^i = [z_1^i, z_2^i, \dots, z_n^i]^T$$

**تذکره ۲:** در این مقاله هدف دستیابی به توافق خروجی می‌باشد بنابراین خطای توافق باید بر اساس تخمین متغیر حالت خروجی



تعریف شود. در صورتی که خطای توافق بر اساس تخمین متغیر حالت خروجی تعریف شود، باید پایداری دینامیک داخلی سیستم چندعاملی نیز مورد بررسی قرار گیرد. جهت جلوگیری از این امر در این جا دینامیک خطای توافق بر اساس بردار تخمین متغیرهای حالت عامل ها نوشته شده است، اما در نهایت با اعمال تغییر متغیر بیان شده در رابطه ی (۲۷) توافق خروجی حاصل می شود. در صورتی که خطای توافق و خطای رویت گرها به سمت صفر میل کند، توافق حاصل شده است و خروجی های عامل های پیرو می توانند خروجی عامل رهبر را ردیابی کنند. هدف طراحی کنترل کننده های تطبیقی مقاوم با استفاده از تخمین متغیرهای حالت عامل ها می باشد به نحوی که خطای رویت گر و خطای توافق به صفر همگرا شوند. از این رو معادلات دینامیک خطا به صورت زیر تشکیل می شوند. معادله ی دینامیک خطای رویت گر رهبر با توجه به معادله های (۲) و (۱۳) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \dot{z}^0 &= \dot{x}^0 - \dot{\hat{x}}^0 \\ &= Ax^0 + Bu^0 - A\hat{x}^0 - Bu^0 - K(y^0 - \hat{y}^0) \\ &= Az^0 - K(y^0 - \hat{y}^0) \\ &= (A - KC)z^0 \end{aligned} \quad (21)$$

با استفاده از معادله های (۱۰) و (۱۴) معادله دینامیک خطای رویت گر هر یک از عامل ها نیز به صورت زیر بدست آمده است:

$$\begin{aligned} \dot{z}^i &= \dot{x}^i - \dot{\hat{x}}^i \\ &= Ax^i + F^i(x^i, t) + \Delta F^i(x^i, t) + \bar{\delta}^i + \\ &\quad B\phi(u^i) - A\hat{x}^i - F^i(\hat{x}^i, t) - B\phi(u^i) - K(y^i - \hat{y}^i) \\ &= Az^i + F^i(x^i, t) - F^i(\hat{x}^i, t) - K(y^i - \hat{y}^i) \\ &\quad + \Delta F^i(x^i, t) + \bar{\delta}^i \\ &= (A - KC)z^i + F^i(x^i, t) - F^i(\hat{x}^i, t) \\ &\quad + \Delta F^i(x^i, t) + \bar{\delta}^i \end{aligned} \quad (22)$$

که  $K = [k_1, \dots, k_n]^T \in R^{n \times 1}$  می باشد.

همچنین معادلات دینامیکی خطای توافق با توجه به معادلات (۱۳) و (۱۴) به صورت زیر حاصل شده اند:

$$\begin{aligned} \dot{e}^i &= (b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij})(\dot{\hat{x}}^i) - \sum_{j=1}^N a_{ij}(\dot{\hat{x}}^j) - b^i(\dot{\hat{x}}^0) \\ &= (b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij})(A\hat{x}^i + F^i(\hat{x}^i, t) + K(y^i - \hat{y}^i) + B\phi(u^i)) \\ &\quad - (\sum_{j=1}^N a_{ij})(A\hat{x}^j + F^j(\hat{x}^j, t) + K(y^j - \hat{y}^j) + B\phi(u^j)) \\ &\quad - b^i(A\hat{x}^0 + K(y^0 - \hat{y}^0) + Bu^0) \\ &= Ae^i + (b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij})B\phi(u^i) - \\ &\quad \sum_{j=1}^N a_{ij}B\phi(u^j) - b^iBu^0 + \Pi^i \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن  $\Pi^i$  برابر است با:

$$\begin{aligned} \Pi^i &= (b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij})(F^i(\hat{x}^i, t) + K(y^i - \hat{y}^i)) \\ &\quad - (\sum_{j=1}^N a_{ij})(F^j(\hat{x}^j, t) + K(y^j - \hat{y}^j)) \\ &\quad - b^i(K(y^0 - \hat{y}^0)) \end{aligned} \quad (24)$$

خطای توافق بیان شده در رابطه‌ی (۲۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \dot{e}_1^i = e_2^i + \tilde{k}_1 \\ \dot{e}_2^i = e_3^i + \tilde{k}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1}^i = e_n^i + \tilde{k}_{n-1} \\ \dot{e}_n^i = (b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij})(f_n^i(\hat{x}^i, t) + \beta\phi(u^i)) \\ \quad - \sum_{j=1}^N a_{ij}(f_n^j(\hat{x}^j, t) + \beta\phi(u^j)) - b^i u^0 + \tilde{k}_n \end{cases} \quad (25)$$

که در آن  $\tilde{k}_m$  برای  $m = 1, 2, \dots, n$  برابر است با:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_m &= (b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij})k_m(y^i - \hat{y}^i) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N a_{ij}k_m(y^j - \hat{y}^j) - b^i k_m(y^0 - \hat{y}^0) \end{aligned} \quad (26)$$

به منظور طراحی کنترل کننده برای سیستم فوق از تغییر متغیر زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^i &= e_1^i \\ \varepsilon_2^i &= e_2^i + \tilde{k}_1 \\ \varepsilon_3^i &= e_3^i + \tilde{k}_2 + \dot{\tilde{k}}_1 \\ &\vdots \\ \varepsilon_{n-1}^i &= e_{n-1}^i + \tilde{k}_{n-2} + \dot{\tilde{k}}_{n-3} + \dots + \tilde{k}_1^{[n-3]} \\ \varepsilon_n^i &= e_n^i + \tilde{k}_{n-1} + \dot{\tilde{k}}_{n-2} + \dots + \tilde{k}_1^{[n-2]} \end{aligned} \quad (27)$$

**تذکره ۳:** عبارت داخل براکت مرتبه‌ی مشتق می‌باشد.

**تذکره ۴:** همانطور که بیان شد در این مقاله هدف دستیابی به توافق خروجی می‌باشد. با توجه به این که خطای توافق بر اساس

تخمین متغیر حالت‌ها تعریف شده‌اند با استفاده از این تغییر متغیر توافق خروجی حاصل می‌شود.

بنابراین دینامیک خطای جدید به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_m^i = \varepsilon_{m+1}^i & m=1, \dots, n-1 \\ \dot{\varepsilon}_n^i = \dot{\varepsilon}_n^i + \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{k}_l^{[n-l]} \end{cases} \quad (28)$$

در این مقاله هدف طراحی قوانین کنترلی تطبیقی مقاوم بر مبنای مد لغزشی می‌باشد به گونه‌ای که علی‌رغم وجود اشباع نامتقارن ورودی و عدم قطعیت‌های سیستم، توافق خروجی حاصل شود.

#### ۴- طراحی قوانین کنترلی توزیع شده

در این بخش، هدف طراحی قوانین کنترلی توزیع شده برای هر یک از عامل‌ها بر اساس ایده‌ی مد لغزشی می‌باشد. کنترل مد لغزشی از دوفاز اساسی تشکیل شده است. فاز دست‌یابی و فاز لغزش. برای این منظور، نخست باید سطح لغزش مناسب به گونه‌ای طراحی شود که معادلات حرکت بر روی سطح (معادلات کاهش مرتبه یافته) پایدار باشند و سپس با استفاده از سطح لغزش طراحی شده، قوانین کنترلی به گونه‌ای طراحی شوند که مسیرهای حالت سیستم به سطح لغزش دست‌یابند و روی آن باقی بمانند. ساختار سطح لغزش پیشنهادی برای عامل پیرو  $i$  ام به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma^i = \varepsilon_n^i + \sum_{m=1}^{n-1} c_m^i \varepsilon_m^i \quad (29)$$

که  $\sigma^i \in R$  سطح لغزش عامل پیرو  $i$  ام می‌باشد و  $c_m^i$  ها برای  $i=1,2,\dots,N$  و  $m=1,2,\dots,n-1$  پارامترهای طراحی می‌باشند و باید به نحوی طراحی گردند که چند جمله‌ای زیر برای هر یک از عوامل هر ویتز باشد:

$$R = (s)^n + c_{n-1}^i (s)^{n-1} + \dots + c_1^i \quad (30)$$

زمانی که مسیرهای حالت سیستم به سطح لغزش دست‌یابند،  $\sigma^i = 0$  می‌شود، بنابراین داریم:

$$\sigma^i = \varepsilon_n^i + \sum_{m=1}^{n-1} c_m^i \varepsilon_m^i = 0 \quad (31)$$

با توجه به معادله‌ی فوق رابطه‌ی زیر بر روی سطح لغزش برقرار است:

$$\varepsilon_n^i = -\sum_{m=1}^{n-1} c_m^i \varepsilon_m^i \quad (32)$$

با استفاده از معادلات (۲۸) و (۳۲) معادلات کاهش مرتبه یافته (معادلات حرکت بر روی سطح) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^i \\ \dot{\varepsilon}_2^i \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1}^i \end{bmatrix}}_{rd} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_1^i & -c_2^i & \dots & -c_{n-1}^i \end{bmatrix}}_{\tilde{A}^i} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1^i \\ \varepsilon_2^i \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}^i \end{bmatrix}}_{rd} \quad (33)$$

که  $\mathcal{E}_{rd}^i = [\mathcal{E}_1^i, \mathcal{E}_2^i, \dots, \mathcal{E}_{n-1}^i]^T \in R^{n-1}$  بردار حالت معادلات کاهش مرتبه یافته می باشد. اگر بردار حالت معادلات کاهش مرتبه یافته به صفر همگرا شود آنگاه طبق معادله ی (۳۲)  $\mathcal{E}_n^i$  نیز به صفر همگرا می شود. از آنجا که  $\mathcal{E}_1^i = e_1^i$ ، با صفر شدن  $\mathcal{E}_n^i$  ها  $e_1^i$  نیز به صفر همگرا می شود. از آنجا که  $\hat{\gamma}^i = e_1^i$  است، توافق مورد نظر که توافق خروجی است حاصل می شود. برای این منظور معادلات کاهش مرتبه یافته ی (۳۳) باید پایدار مجانبی باشند. بنابراین در صورتی که ماتریس  $\hat{A} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$  در معادله ی (۳۳) هرویتز باشد، معادلات کاهش مرتبه یافته (۳۳) پایدار مجانبی می باشند. از این رو باید پارامترهای طراحی به گونه ای انتخاب شوند که ماتریس  $\hat{A}$  هرویتز باشد.

**قضیه ۱:** یک سیستم چند عاملی رهبر محور با معادلات ذکر شده در روابط (۱) و (۴) را در نظر بگیرید، قوانین کنترلی تطبیقی توزیع شده (۳۴) با قوانین تطبیقی بیان شده در معادلات (۳۶) و (۳۷)، توافق خروجی بین عامل ها را تضمین می کنند.

$$u^i = - \frac{\tau}{\beta(b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij})} \xi_1^i \mu^i \operatorname{sgn}(\sigma^i) \quad (34)$$

که  $\tau > 1$  می باشد و

$$\begin{aligned} \mu^i = & \left| \sum_{m=1}^{n-1} c_m^i \mathcal{E}_{m+1}^i \right| + \left| f_n^i(b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij}) - \sum_{j=1}^N a_{ij} f_n^j \right| \\ & + \left| - \sum_{j=1}^N a_{ij} \beta \phi(u^j) - b^i u^o \right| + \left| \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{k}_1^{[n-l]} \right| + \left| \tilde{k}_n \right| \end{aligned} \quad (35)$$

همچنین قوانین تطبیقی عبارتند از:

$$\dot{\xi}_1^i = \tau \mu^i (\xi_1^i)^3 |\sigma^i| \quad (36)$$

$$\hat{\Lambda}^i = \|z^i\| \|P\| \quad (37)$$

**اثبات:** تابع زیر به عنوان کاندید تابع لیاپانوف عامل  $i$  ام در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} V^i = & \frac{1}{2}(\sigma^i)^2 + \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}^i)^2 + \frac{1}{2}(\xi_2^i)^2 \\ & + \frac{b^i}{2}(z^0)^T P z^0 + \frac{1}{2}(z^i)^T P z^i \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (38)$$

که  $\tilde{\Lambda}^i = \hat{\Lambda}^i - \Lambda^i$  و  $\xi_2^i = (\xi_1^i)^{-1} - \xi^i$ .  $\xi_2^i = (\xi_1^i)^{-1} - \xi^i$  تخمین  $\xi^i$  می باشد. ساختار تابع لیاپانوف پیشنهادی علاوه بر معادلات سطح لغزش، خطای تخمین رویت گرها و پارامترهای تطبیقی را نیز شامل می شود. با مشتق گیری از تابع لیاپانوف داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &= \sigma^i \dot{\sigma}^i + \tilde{\Lambda}^i \tilde{\Lambda}^i + \xi_2^i \xi_2^i + \\ &+ \frac{b^i}{2} \left( (\dot{z}^0)^T P z^0 + (z^0)^T P \dot{z}^0 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( (\dot{z}^i)^T P z^i + (z^i)^T P \dot{z}^i \right) \end{aligned} \quad (39)$$

با توجه به معادلات (۲۵)، (۲۸) و (۲۹) مشتق سطح لغزش برابر است با:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^i &= \dot{\varepsilon}_n^i + \sum_{k=1}^{n-1} c_m^i \varepsilon_{m+1}^i \\ &= \dot{e}_n^i + \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{k}_l^{[n-l]} + \sum_{k=1}^{n-1} c_m^i \varepsilon_{m+1}^i \\ &= (b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij}) (f_n^i(\hat{x}^i, t) + \beta \phi(u^i)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N a_{ij} (f_n^j(\hat{x}^j, t) + \beta \phi(u^j)) - b^i u^0 + \tilde{k}_n \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{k}_l^{[n-l]} + \sum_{m=1}^{n-1} c_m^i \varepsilon_{m+1}^i \end{aligned} \quad (40)$$

با جایگذاری معادله‌ی فوق در رابطه‌ی (۳۹) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &= \sigma^i \left( (b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij}) (f_n^i(\hat{x}^i, t) + \beta \phi(u^i)) \right) \\ &\quad - \sigma^i \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} (f_n^j(\hat{x}^j, t) + \beta \phi(u^j)) + b^i u^0 \right) \\ &\quad + \sigma^i \left( \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{k}_l^{[n-l]} + \sum_{m=1}^{n-1} c_m^i \varepsilon_{m+1}^i + \tilde{k}_n \right) + \tilde{\Lambda}^i \tilde{\Lambda}^i + \xi_2^i \xi_2^i \\ &\quad + \frac{b^i}{2} \left( (\dot{z}^0)^T P z^0 + (z^0)^T P \dot{z}^0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( (\dot{z}^i)^T P z^i + (z^i)^T P \dot{z}^i \right) \end{aligned} \quad (41)$$

لذا می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i \leq & \left| \sigma^i \left( \left( b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) (f_n^i(\hat{x}^i, t) - \sum_{j=1}^N a_{ij} (f_n^j(\hat{x}^j, t))) \right) \right. \\ & + \left| \sigma^i \left( -\beta \phi(u^i) \right) - b^i u^0 \right| \\ & + \left| \sigma^i \left( \left| \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{k}_l^{[n-l]} \right| + \left| \sum_{m=1}^{n-1} c_m^i \varepsilon_{m+1}^i \right| + \left| \tilde{k}_n \right| \right) \right. + \sigma^i \left( \left( b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) \beta \phi(u^i) \right) \\ & + \tilde{\Lambda}^i \tilde{\Lambda}^i + \xi_2^i \xi_2^i \\ & + \frac{b^i}{2} \left( (\dot{z}^0)^T P z^0 + (z^0)^T P \dot{z}^0 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( (\dot{z}^i)^T P z^i + (z^i)^T P \dot{z}^i \right) \end{aligned} \quad (42)$$

با توجه به رابطه‌ی داده شده برای  $\mu^i$  داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i \leq & \left| \sigma^i \mu^i + \sigma^i \left( \left( b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) \beta \phi(u^i) \right) \right. + \xi_2^i \xi_2^i \\ & + \frac{b^i}{2} \left( (\dot{z}^0)^T P z^0 + (z^0)^T P \dot{z}^0 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( (\dot{z}^i)^T P z^i + (z^i)^T P \dot{z}^i \right) + \tilde{\Lambda}^i \tilde{\Lambda}^i \end{aligned} \quad (43)$$

با استفاده از رابطه‌ی بیان شده در معادله‌ی (۶) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i \leq & \left| \sigma^i \mu^i + \sigma^i \left( \left( b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) \omega^i(u^i) \beta u^i \right) \right. + \xi_2^i \xi_2^i \\ & + \frac{b^i}{2} \left( (\dot{z}^0)^T P z^0 + (z^0)^T P \dot{z}^0 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( (\dot{z}^i)^T P z^i + (z^i)^T P \dot{z}^i \right) + \tilde{\Lambda}^i \tilde{\Lambda}^i \end{aligned} \quad (44)$$

با جایگذاری قوانین کنترلی ارائه شده در رابطه‌ی (۳۴) در معادله‌ی فوق داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i \leq & \left| \sigma^i \mu^i - \sigma^i \left( \omega^i(u^i) \tau \xi_1^i \mu^i \operatorname{sgn}(\sigma^i) \right) \right. + \xi_2^i \xi_2^i \\ & + \frac{b^i}{2} \left( (\dot{z}^0)^T P z^0 + (z^0)^T P \dot{z}^0 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( (\dot{z}^i)^T P z^i + (z^i)^T P \dot{z}^i \right) + \tilde{\Lambda}^i \tilde{\Lambda}^i \end{aligned} \quad (45)$$

با توجه به رابطه‌ی بیان شده در معادله‌ی (۹)، داریم:

$$\xi_2^i < \omega^i(u^i(t)) \rightarrow -\omega^i(u^i(t)) < -\xi_2^i \quad (46)$$

بنابراین با توجه به مثبت بودن عبارت‌های  $\tau \mu^i \xi_1^i$  می‌توان نوشت:

$$-\omega^i(u^i(t))\tau\mu^i\xi_1^i < -\xi^i\tau\mu^i\xi_1^i \quad (47)$$

با جایگذاری معادله‌ی فوق در رابطه‌ی (۴۵) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq |\sigma^i|\mu^i - |\sigma^i|\left(\xi^i\tau\xi_1^i\mu^i\right) + \xi_2^i\xi_2^i \\ &+ \frac{b^i}{2}\left((\dot{z}^0)^T Pz^0 + (z^0)^T P\dot{z}^0\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left((\dot{z}^i)^T Pz^i + (z^i)^T P\dot{z}^i\right) + \tilde{\Lambda}^i\tilde{\Lambda}^i \end{aligned} \quad (48)$$

با توجه به تعریف  $\xi_2^i$  داریم:

$$\xi_2^i = -(\xi_1^i)^{-2}\xi_1^i \quad (49)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۴۸) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq |\sigma^i|\mu^i - |\sigma^i|\left(\xi^i\tau\xi_1^i\mu^i\right) - \xi_2^i(\xi_1^i)^{-2}\xi_1^i \\ &+ \frac{b^i}{2}\left((\dot{z}^0)^T Pz^0 + (z^0)^T P\dot{z}^0\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left((\dot{z}^i)^T Pz^i + (z^i)^T P\dot{z}^i\right) + \tilde{\Lambda}^i\tilde{\Lambda}^i \end{aligned} \quad (50)$$

با جایگذاری قوانین تطبیقی (۳۶) در معادله‌ی فوق بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq |\sigma^i|\mu^i - |\sigma^i|\left(\xi^i\tau\xi_1^i\mu^i\right) - \tau\mu^i\xi_2^i\xi_1^i|\sigma^i| \\ &+ \frac{b^i}{2}\left((\dot{z}^0)^T Pz^0 + (z^0)^T P\dot{z}^0\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left((\dot{z}^i)^T Pz^i + (z^i)^T P\dot{z}^i\right) + \tilde{\Lambda}^i\tilde{\Lambda}^i \end{aligned} \quad (51)$$

با توجه به تعریف  $\xi_2^i = (\xi_1^i)^{-1} - \xi^i$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq |\sigma^i| \mu^i - |\sigma^i| \left( \xi^i \tau \xi_1^i \mu^i \right) - \tau \mu^i \xi_1^i \left( (\xi_1^i)^{-1} - \xi^i \right) |\sigma^i| \\ &\quad + \frac{b^i}{2} \left( (\dot{z}^0)^T P z^0 + (z^0)^T P \dot{z}^0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( (\dot{z}^i)^T P z^i + (z^i)^T P \dot{z}^i \right) + \tilde{\Lambda}^i \dot{\tilde{\Lambda}}^i \\ &\leq -|\sigma^i| \mu^i (\tau - 1) \\ &\quad + \frac{b^i}{2} \left( (\dot{z}^0)^T P z^0 + (z^0)^T P \dot{z}^0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( (\dot{z}^i)^T P z^i + (z^i)^T P \dot{z}^i \right) + \tilde{\Lambda}^i \dot{\tilde{\Lambda}}^i \end{aligned} \quad (52)$$

با جایگذاری دینامیک خطای رویت گرها از معادلات (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq -|\sigma^i| \mu^i (\tau - 1) \\ &\quad + \frac{b^i}{2} \left( ((A - KC)z^0)^T P z^0 + (z^0)^T P ((A - KC)z^0) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( (A - KC)z^i + F^i(x^i, t) - F^i(\hat{x}^i, t) + \Delta F^i + \bar{\delta}^i \right)^T P z^i \\ &\quad + \frac{1}{2} (z^i)^T P \left( (A - KC)z^i + F^i(x^i, t) - F^i(\hat{x}^i, t) + \Delta F^i + \bar{\delta}^i \right) \\ &\quad + \tilde{\Lambda}^i \dot{\tilde{\Lambda}}^i \end{aligned} \quad (53)$$

با توجه به معادله‌ی لیاپانوف بیان شده در رابطه‌ی (۱۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq -|\sigma^i| \mu^i (\tau - 1) \\ &\quad - \frac{b^i}{2} \left( (z^0)^T Q z^0 \right) - \frac{1}{2} (z^i)^T Q z^i \\ &\quad + (z^i)^T P \left( F^i(x^i, t) - F^i(\hat{x}^i, t) + \Delta F^i + \bar{\delta}^i \right) \\ &\quad + \tilde{\Lambda}^i \dot{\tilde{\Lambda}}^i \end{aligned} \quad (54)$$

با توجه به لیبیشتر بودن بردارهای  $F^i$  و روابط (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq -|\sigma^i| \mu^i (\tau - 1) \\ &\quad - \frac{b^i}{2} \left( \lambda_{\min}(Q) \|z^0\|^2 \right) - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|z^i\|^2 \\ &\quad + L^i \|z^i\|^2 \|P\| + \Lambda^i \|z^i\| \|P\| + \tilde{\Lambda}^i \dot{\tilde{\Lambda}}^i \end{aligned} \quad (55)$$

که  $\lambda_{\min}(Q)$  کوچکترین مقدار ویژه‌ی ماتریس  $Q$  می‌باشد.

با توجه به تعریف  $\tilde{\Lambda}^i$  داریم:

$$\tilde{\Lambda}^i = \dot{\tilde{\Lambda}}^i \quad (56)$$

با جایگذاری  $\Lambda^i = \dot{\tilde{\Lambda}}^i - \tilde{\Lambda}^i$  و معادله‌ی (۵۶) در رابطه‌ی (۵۵) داریم:



$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq -|\sigma^i| \mu^i (\tau - 1) \\ &\quad - \frac{b^i}{2} \left( \lambda_{\min}(Q) \|z^0\|^2 \right) - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|z^i\|^2 \\ &\quad + L^i \|z^i\|^2 \|P\| + (\hat{\Lambda}^i - \tilde{\Lambda}^i) \|z^i\| \|P\| + \tilde{\Lambda}^i \hat{\Lambda}^i \end{aligned} \quad (57)$$

با جایگذاری قوانین تطبیقی (۳۷) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq -|\sigma^i| \mu^i (\tau - 1) \\ &\quad - \frac{b^i}{2} \left( \lambda_{\min}(Q) \|z^0\|^2 \right) - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|z^i\|^2 \\ &\quad + L^i \|z^i\|^2 \|P\| + \hat{\Lambda}^i \|z^i\| \|P\| \end{aligned} \quad (58)$$

با توجه به این که عبارت  $-\frac{b^i}{2} \left( \lambda_{\min}(Q) \|z^0\|^2 \right)$  همواره منفی است، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq -|\sigma^i| \mu^i (\tau - 1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|z^i\|^2 + L^i \|z^i\|^2 \|P\| + \hat{\Lambda}^i \|z^i\| \|P\| \end{aligned} \quad (59)$$

معادله‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}^i &\leq -h^i \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|z^i\|^2 + L^i \|z^i\|^2 \|P\| + \hat{\Lambda}^i \|z^i\| \|P\| \end{aligned} \quad (60)$$

که در آن  $h^i = |\sigma^i| \mu^i (\tau - 1)$  می‌باشد و در صورتی که  $\tau > 1$  انتخاب شود تابع  $h^i$  همواره مثبت می‌باشد. همچنین برای

$$\|z^i\| \geq \frac{\hat{\Lambda}^i \|P\|}{\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) - L^i \|P\|} = \bar{\lambda}^i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ناحیه عبارت

$$-\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|z^i\|^2 + L^i \|z^i\|^2 \|P\| + \hat{\Lambda}^i \|z^i\| \|P\| < 0$$

می‌باشد بنابراین می‌توان نوشت:

$$\dot{V}^i \leq -h^i \quad \forall \|z^i\| \geq \bar{\lambda}^i \quad (61)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله‌ی فوق داریم:

$$V^i(t) - V^i(0) \leq -\int_0^t h^i(t) dt \quad (62)$$

با توجه به این که  $V^i(0)$  دارای یک مقدار محدود می‌باشد و همچنین  $\dot{V}^i$  تابعی منفی می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که تابع

$V^i(t)$  یک تابع غیر افزایشی می‌باشد. بنابراین طبق لم باربالات [۳۵] داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h^i(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left( |\sigma^i| \mu^i (\tau - 1) \right) = 0 \quad (63)$$

با توجه به این که  $\tau^i$  و  $\mu^i$  مقادیر ثابتی هستند از معادله‌ی فوق می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^i(t) = 0 \quad (64)$$

همچنین با توجه به تعریف سطح لغزش می‌توان نتیجه گرفت که  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^i(t) = [\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^i, \dots, \varepsilon_n^i] = 0$ . بنابراین با توجه به این که  $\varepsilon_1^i = e_1^i$  می‌توان نتیجه گرفت که مولفه‌ی اول بردار خطا به صفر همگرا می‌شود و توافق خروجی حاصل می‌شود.

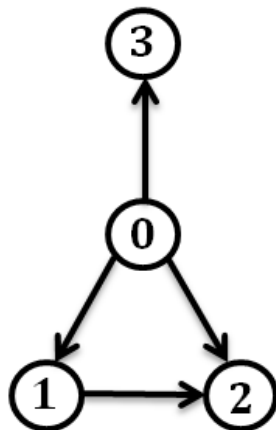
**تذکره ۵:** به علت استفاده از تابع علامت در قوانین کنترلی طراحی شده، سیگنال کنترلی دارای چترینگ می‌باشد. از این رو برای حذف چترینگ، سیگنال کنترلی با یک تابع پیوسته، تقریب زده شده است و در شبیه‌سازی‌ها از آن استفاده شده است.

$$u^i = -\frac{\tau}{\beta(b^i + \sum_{j=1}^N a_{ij})} \xi_1^i \mu^i \tanh\left(\frac{\sigma^i}{\rho}\right) \quad (65)$$

$\rho$  یک مقدار مثبت کوچک می‌باشد.

## ۵- شبیه‌سازی

در این قسمت با ارائه‌ی یک مثال عملی به ارزیابی عملکرد سیگنال کنترلی ارائه شده پرداخته شده است. در اینجا یک سامانه‌ی چند عاملی متشکل از چهار زیردریایی در نظر گرفته شده است. یک زیردریایی به عنوان عامل رهبر و سه زیردریایی به عنوان عامل‌های پیرو فرض شده است. عامل‌ها تحت گراف داده شده در شکل ۱ با یکدیگر در ارتباط هستند.



شکل ۱. توپولوژی گراف ارتباطی

برای راحتی در طراحی کنترل‌کننده می‌توان کل سیستم زیردریایی را به سه زیر سیستم مستقل از یکدیگر به صورت زیر سیستم فرمان، زیر سیستم سرعت و زیر سیستم غواصی تفکیک کرد و سپس برای هر کدام کنترل‌کننده‌ای مجزا طراحی نمود. در اینجا تنها زیر سیستم فرمان در نظر گرفته شده است. بر اساس مرجع [۳۶] معادله‌ی دینامیکی زیر سیستم فرمان هر یک از زیردریایی‌های پیرو به صورت زیر نوشته شده است:

$$\begin{cases} \dot{\psi}^i = r^i \\ \dot{r}^i = f^i(r^i) + \beta\varphi(u^i) + \delta^i \\ y^i = \psi^i \end{cases} \quad i=1,2,3 \quad (66)$$

که  $\psi^i$  و  $r^i$  متغیرهای حالت عامل  $i$ ام می‌باشند و به ترتیب بیانگر زاویه‌ی فرمان و سرعت زاویه‌ای حول محور قائم زیردریایی می‌باشند.  $u^i$  سیگنال کنترلی می‌باشد. همچنین  $f^i(r^i) = -1.538r^i |r^i| - 0.01255r^i$  عبارت غیرخطی معلوم و مشخص می‌باشد و  $\beta = -5.933$  یک ضریب ثابت می‌باشد.  $\delta^i(t)$  بیانگر اغتشاشات خارجی سیستم می‌باشد و برابر است با  $\delta^i(t) = v^i |v^i|$  همچنین  $v^i = 0.1 \sin(t)$  در نظر گرفته شده است. معادله‌ی دینامیکی عامل رهبر به صورت زیر می‌باشد:

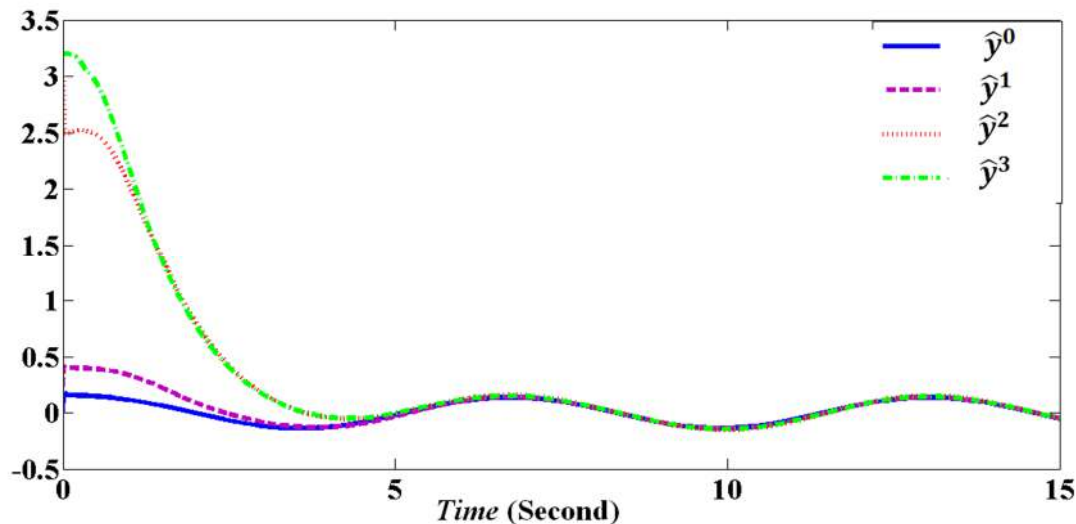
$$\begin{cases} \dot{\psi}^0 = r^0 \\ \dot{r}^0 = u^0 \\ y^0 = \psi^0 \end{cases} \quad (67)$$

$u^0$  سیگنال کنترلی رهبر می‌باشد و به صورت  $u^0 = -\frac{\sin(\psi^0)}{1 + \exp(-t)}$  تعریف شده است که منجر به ایجاد نوساناتی با دامنه و فرکانس مشخص در معادلات دینامیکی رهبر می‌گردد. شبیه‌سازی‌ها به ازای مقادیر زیر صورت گرفته است:

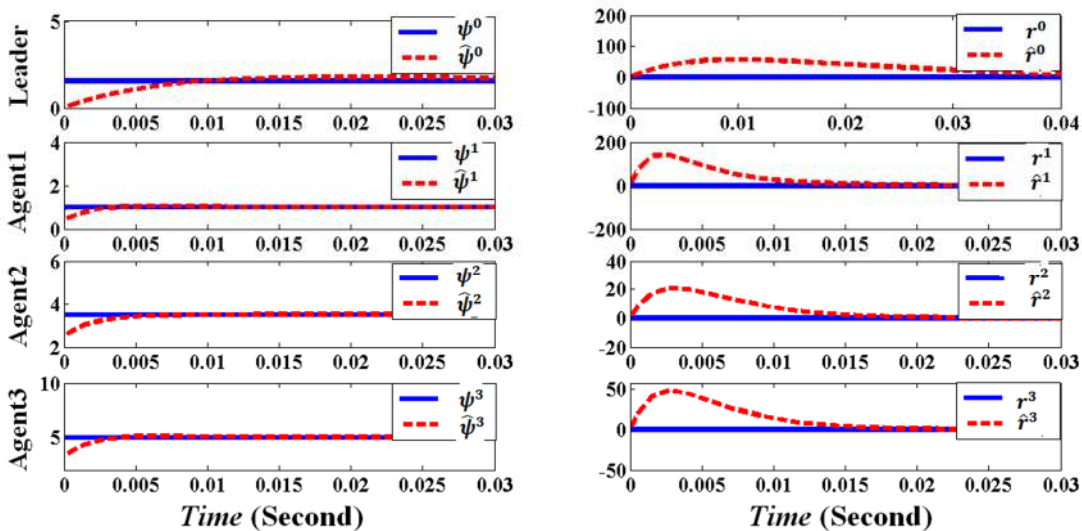
$$\begin{aligned} c_1^i &= 1 \\ \psi^0(0) &= \pi/2, \psi^1(0) = 1.2, \psi^2(0) = 3.5, \psi^3(0) = 5 \\ \hat{\psi}^0(0) &= 0, \hat{\psi}^1(0) = .4, \hat{\psi}^2(0) = 2.5, \hat{\psi}^3(0) = 3.2 \\ r^0(0) &= 0, r^1(0) = 0, r^2(0) = 0, r^3(0) = 0 \quad \hat{r}^0(0) = 0, \hat{r}^1(0) = 0, \hat{r}^2(0) = 0, \hat{r}^3(0) = 0 \end{aligned}$$

و حدود اشباع  $-u_L^i = -3, u_H^i = 3$  فرض شده است.

اشکال ۲ تا ۵ نتایج شبیه‌سازی‌ها را نشان می‌دهند. پاسخ زمانی تخمین متغیرهای حالت خروجی عامل‌ها در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تخمین‌های متغیرهای حالت خروجی عامل‌های پیرو ( $\hat{\psi}^i$ ) به تخمین متغیر حالت خروجی ( $\psi^0$ ) عامل رهبر همگرا شده‌اند و توافق خروجی علی‌رغم به اشباع رفتن سیگنال کنترلی و اغتشاشات خارجی وارد بر سیستم حاصل شده است. در شکل ۳ پاسخ زمانی رویت گره‌ها رسم شده است. نمودار توپر پاسخ زمانی متغیرهای حالت عامل‌ها و نمودار نقطه چین قرمز رنگ پاسخ زمانی تخمین متغیرهای حالت عامل‌ها را نشان می‌دهند. متغیر حالت اول عامل‌ها ( $\psi^i$ ) و تخمینشان ( $\hat{\psi}^i$ ) در نمودار سمت راست و متغیر حالت دوم عامل‌ها ( $r^i$ ) و تخمینشان ( $\hat{r}^i$ ) در نمودار سمت چپ ترسیم شده‌اند. همانطور که نشان داده شده است رویت گره‌ها عملکرد مناسبی داشته‌اند و بعد از مدت زمان اندکی مقدار تخمین زده شده‌ی متغیرهای حالت عامل‌ها به مقادیر واقعیشان همگرا شده‌اند.



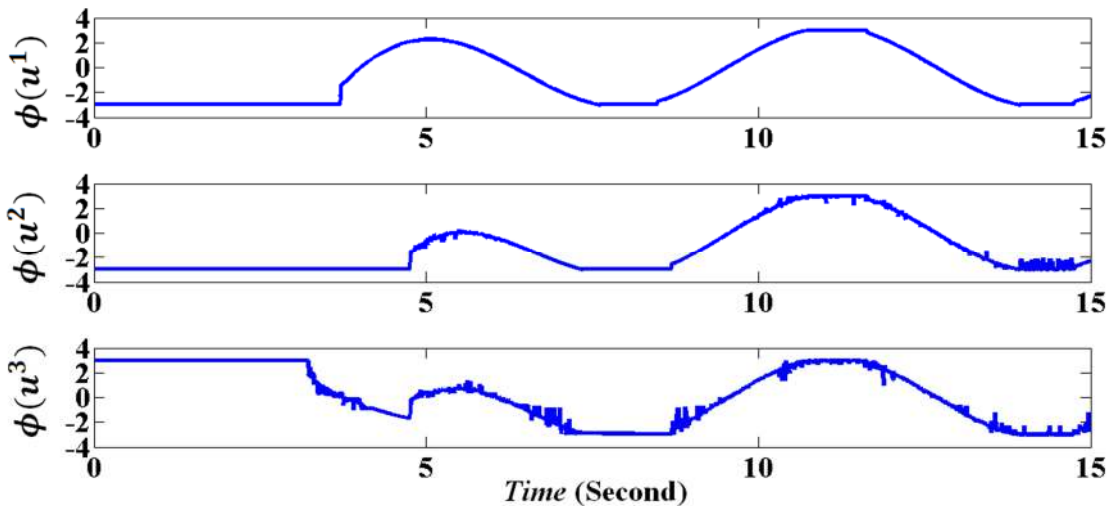
شکل ۲. پاسخ زمانی تخمین متغیر حالت خروجی هر یک از عامل‌ها



شکل ۳. پاسخ زمانی متغیر حالت (نمودار توپر) و تخمین متغیر حالت (نمودار نقطه چین) هر یک از عامل‌ها

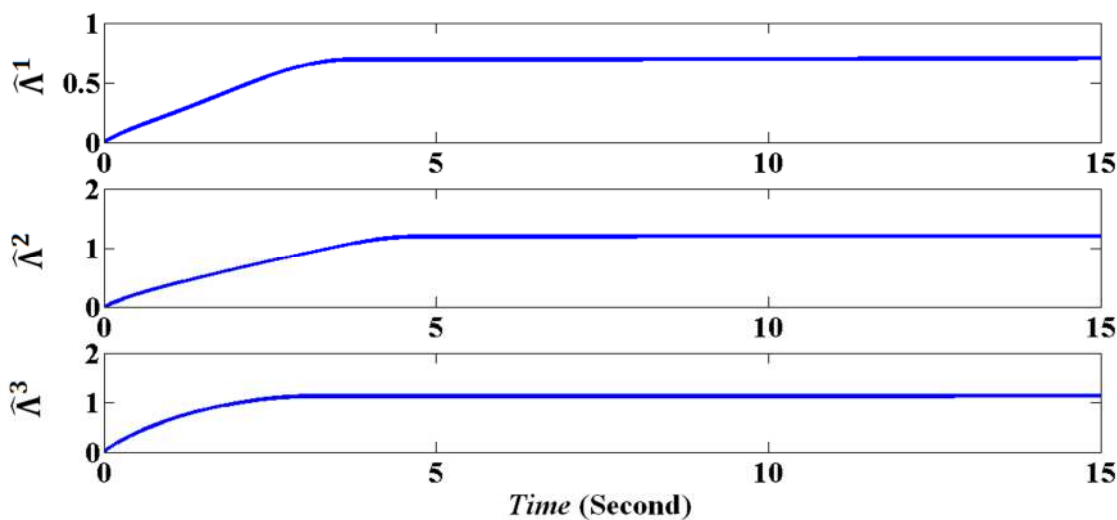
پاسخ زمانی سیگنال کنترلی اشباع شده‌ی هر یک از عامل‌ها در شکل ۴ نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود

سیگنال‌های کنترلی با توجه به بازه‌ی اشباعی که برای آن‌ها تعریف شده است ( $u_L^i = -3, u_H^i = 3$ )، به اشباع رفته اند.



شکل ۴. پاسخ زمانی سیگنال کنترلی اشباع شده‌ی عامل‌ها

شکل ۵ پاسخ زمانی حد بالای اغتشاشات خارجی وارد به سیستم ( $\hat{\Lambda}^i$ ) را نشان می‌دهد که با استفاده از قوانین تطبیقی (۴۰) بدست آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود، این حدود به یک مقدار ثابت همگرا شده‌اند.



شکل ۵. پاسخ زمانی متغیر حالت  $\hat{\Lambda}^i$  هر یک از عامل‌ها

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به طراحی کنترل‌کننده‌های تطبیقی مبتنی بر رویت‌گر به منظور دست‌یابی به توافق خروجی در سیستم‌های چند عاملی غیرخطی در حضور عدم قطعیت‌های مدل، اغتشاشات خارجی و اشباع نامتقارن ورودی پرداخته شد. برای این منظور، رویت‌گر بهره‌ی بالا برای هر یک از عامل‌ها به نحوی طراحی شد که متغیرهای حالت آنها تخمین زده شوند و سپس با استفاده از تخمین متغیرهای حالت، قوانین کنترلی تطبیقی مبتنی بر رویت‌گر بر اساس ایده‌ی مد لغزشی حاصل شد. در این راستا قضیه‌ای ارائه شد و با توجه به رویکرد لیاپانوفی ثابت شد که خطای توافق به صفر همگرا می‌شود و خروجی‌های عوامل پیرو می‌توانند خروجی عامل رهبر

را با وجود عدم قطعیت‌های مدل، اغتشاشات خارجی و اشباع نامتقارن ورودی ردیابی کنند. علاوه بر این، نتایج شبیه‌سازی عملکرد موثر کنترل‌کننده پیشنهادی را تایید می‌کنند.

## مراجع

- [1] Chen Yao, Lu Jinhua, Yu Xinghuo, Hill David J, "Multi-agent systems with dynamical topologies: Consensus and applications," *Expert Systems with Applications*, 2013, vol. 13, no.3, pp.21-24.
- [2] Olfati-Saber Reza, Fax Alex, Murray Richard M, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *Proceedings of the IEEE*, 2007, vol. 95, no. 1, pp. 215-233.
- [3] Vasca, Francesco, Carmela Bernardo, and Raffaele Iervolino, "Practical consensus in bounded confidence opinion dynamics," *Automatica*, 2021, vol. 129, no. 3.
- [4] Jian, Le, et al, "Distributed economic dispatch method for power system based on consensus," *IET Renewable Power Generation*, 2020, vol. 14, no. 9, pp. 1424-1432.
- [5] Arnold, Rachel, and Dave Longley, "A deterministic Byzantine fault tolerant asynchronous consensus algorithm," *Computer Networks*, 2021, vol. 199, pp. 108431.
- [6] Li, Shuang, and Xi Fang, "A modified adaptive formation of UAV swarm by pigeon flock behavior within local visual field, 2021, vol. 114, pp. 106736.
- [7] Phan, Linh-An, and Taehong Kim, "Fast Consensus-Based Time Synchronization Protocol Using Virtual Topology for Wireless Sensor Networks," *IEEE Internet of Things Journal*, 2020, vol. 8 no. 9, pp. 7485-7496
- [8] Li, Ping, et al, "Fixed-time consensus for disturbed multiple Euler-Lagrange systems with connectivity preservation and quantized input," *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 380, pp. 125303.
- [9] Rahimi Nahid, Binazadeh Tahereh, "Distributed robust consensus control for nonlinear leader-follower multi-agent systems based on adaptive observer-based sliding mode," *Journal of Vibration and Control*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 109-121.
- [10] Yu Shuanghe, Long Xiaojun, "Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode," *Automatica*, 2015, vol. 54, pp. 158-165.
- [11] Khoo Suiyang, Xie Lihua, Man Zhihong, "Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2009, vol. 14, no. 2, pp. 219-228.
- [12] Zhao D, Zou T, Li S, Zhu Q, "Adaptive backstepping sliding mode control for leader-follower multi-agent systems," *IET Control Theory & Applications*, 2012, vol. 6, no. 8, pp. 1109-1117.
- [13] Guan Zhi-Hong, Sun Feng-Lau, Wang Yan-Wu, Li Tao, "Finite-time consensus for leader-following second-order multi-agent networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2012, vol. 59, no. 11, pp. 2646-2654.
- [14] Ren Chang-E, Chen C. P. Philip, "Sliding mode leader-following consensus controllers for second-order non-linear multi-agent systems," *IET Control Theory & Applications*, 2015, vol. 9, no. 10, pp. 1544-1552.
- [15] T. Binazadeh and M. Bahmani, "Design of robust controller for a class of uncertain discrete-time systems subject to actuator saturation," *IEEE Transactions on Automatic Control*; 2017, vol. 62, no. 3, pp. 1505-1510.
- [16] Binazadeh Tahereh and Bahmani Majid, "Robust time-varying output tracking control in the presence of actuator saturation," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2018, vol. 40, no. 1, pp. 61-70.

- [17] Han, Qi, et al, "Couple-Group Consensus for First Order Discrete-Time Multiagent Systems With Competition-Cooperation and Input Saturation Constraints," *IEEE Access*, 2020, Vol. 9, pp. 5555-5562.
- [18] Liu, Xiaolu, et al, "Finite-time Consensus of Leader-following Multi-agent Systems with Input Saturation and Disturbance," *In 2020 IEEE 16th International Conference on Control & Automation (ICCA)*, 2020, Vol. 9, pp. 1265-1270..
- [19] Naserian, Majid, et al, "Leader-follower consensus control for a nonlinear multi-agent robot system with input saturation and external disturbance," *Systems Science & Control Engineering*, 2021, Vol. 9, No. 1, pp. 260-271.
- [20] Lu, Mengyao, et al, "Consensus of second-order heterogeneous multi-agent systems with and without input saturation," *ISA transactions*, 2021.
- [21] Wang, Jinran, et al, "Event-triggered consensus control for second-order multi-agent system subject to saturation and time delay," *Journal of the Franklin Institute*, 2021.
- [22] Zhang, Chuanbao, et al, "Nonlinear robot system finite time consensus control using an adaptive terminal sliding mode approach in presence of input saturation and external disturbance," *Systems Science & Control Engineering*, 2020, Vol. 8, No. 1, pp. 508-520.
- [23] Ren, Ming, Heyan Huang, and Esmail Mirabdollahi, "A Finite-Time Consensus Using an Adaptive Terminal Sliding Mode Control Subjected to Input Saturation and Unknown Bounded Disturbance," *Information Technology and Control*, 2020, Vol. 49, No. 3, pp. 412-420.
- [24] Nan, Xiaoya, Yuezu Lv, and Zhisheng Duan, "On bipartite consensus of linear MASs with input saturation over directed signed graphs: Fully distributed adaptive approach," *IET Control Theory & Applications*, 2021.
- [25] Xie, Yijing, and Zongli Lin, "Global consensus of multi-agent systems with intermittent directed communication in the presence of actuator saturation," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, Vol. 30, No. 18, pp. 8469-8484.
- [26] Gao, Chen, et al., "Consensus Control of Linear Multiagent Systems Under Actuator Imperfection: When Saturation Meets Fault," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021.
- [27] ur Rehman, Ateeq, et al, "Consensus tracking of nonlinear multi-agent systems under input saturation with applications: A sector-based approach," *ISA transactions*, 2020, Vol. 107, No. 18, pp. 194-205.
- [28] Huang, Kaide, and Chengzhi Yuan, "Dynamic Relative Output-Feedback Consensus for Multi-Agent Systems Subject to Actuator Saturation," *IEEE Access*, 2020, Vol. 8, pp. 111239-111252.
- [29] Rehan, Muhammad, Muhammad Tufail, and Shakeel Ahmed, "Leaderless Consensus Control of Nonlinear Multi-agent Systems under Directed Topologies subject to Input Saturation using Adaptive Event-Triggered Mechanism," *Journal of the Franklin Institute*, 2021.
- [30] Huang, Jiangshuai, et al, "Distributed adaptive leader-follower and leaderless consensus control of a class of strict-feedback nonlinear systems: A unified approach," *Automatica*, 2020, Vol. 118, pp. 109021.
- [31] Jin, Xiaozheng, et al, "Adaptive fault-tolerant consensus for a class of leader-following systems using neural network learning strategy," *Neural Networks*, 2020, Vol. 121, pp. 474-483.
- [32] Hao Li-Ying, Yang Guang-Hong, "Fault tolerant control for a class of uncertain chaotic systems with actuator saturation," *Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 73, no. 4, pp. 2133-2147.

- [33] Mohammadpour Samaneh, Binazadeh Tahereh, "Robust Adaptive Synchronization of Chaotic Systems With Nonsymmetric Input Saturation Constraints," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 13, no. 1, pp. 011005.
- [34] Hu Q, "Adaptive output feedback sliding-mode manoeuvring and vibration control of flexible spacecraft with input saturation," *IET Control Theory & Applications*, 2008, vol. 2, no. 6, pp. 467-478.
- [35] Khalil, Hassan, "Nonlinear control," Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2014.
- [36] Shen Qikun, Shi Peng, Shi Yan, Zhang Jianhua, "Adaptive output consensus with saturation and dead-zone and its application," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, vol. 64, no. 6, pp. 5025-5034.