

یک رهیافت نامساویهای ماتریسی خطی برای کنترل بهینه فازی تعقیبی با معیار ترکیبی H_2 / H_∞ برای سیستمهای تاکاگی - سوگنو

زهرا یوسفی^۱ و سعید حقوقی اصفهانی^۲

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی برق، قدرت و کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهر

کرد، zahra.yousefi69@gmail.com

^۲نویسنده مسئول، دانشیار گروه مهندسی برق، قدرت و کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهر کرد،

hoghoughi@sku.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۰۸)



دانشگاه صنعتی سهند

DOR:

20.1001.1.23223146.1400.8.1.3.2

نشریه سالانه‌ی غیرخطی مهندسی برق

دوره ۸ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۰

صفحات ۳۵ الی ۵۶

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

چکیده

در این مطالعه به مسئله طراحی فیدبک خروجی فازی تعقیبی با معیار ترکیبی H_2 / H_∞ برای سیستم‌های غیر خطی مدل شده با روش T-S پرداخته می‌شود. از یک فرم تعمیم داده شده مناسب تعقیبی برای ساختار هر کنترل کننده محلی استفاده شده است. کنترل کننده فازی تعقیبی ارائه شده، موجب برقراری یک قید کنترلی تعقیبی با معیار H_∞ می‌شود، و بطور همزمان یک معیار H_2 را بهینه سازی می‌کند. نتایج این مقاله منجر به ایجاد یک تعادل نسبی بین عملکرد تعقیبی مناسب و میزان انرژی مصرف شده سیگنال ورودی کنترل می‌شود. فرمول بندی این مسئله و یافتن کنترل کننده بهینه تعقیبی نهایی با حل یک دسته نامساویهای ماتریسی خطی انجام می‌شود. در یک مثال گویا، نتایج این مطالعه که بر اساس معیار ترکیبی H_2 / H_∞ است با روش سنتی H_∞ تنها از جهات گوناگون مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی

سیستم‌های فازی تاکاگی - سوگنو
(T-S)،
کنترل تعقیبی با معیار H_∞ ،
معیار ترکیبی H_2 / H_∞ ،
نامساویهای ماتریسی خطی،
کنترل بهینه.



Sahand University
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1400.8.1.3.2](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1400.8.1.3.2)

Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering

Vol.8, No.1

Spring and Summer 2021

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

An LMI Approach to the Problem of Optimal Fuzzy Mixed H_2 / H_∞ Tracking Control Design for T-S Fuzzy Systems

Zahra Yousefi ¹ and Said Houghoughi Esfahani ²

¹Graduate Master Degree Student, Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran, zahra.yousefi69@gmail.com.

²**Corresponding Author**, Associate Professor, Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran, houghoughi@sku.ac.ir.

ABSTRACT

This study is concerned with the problem of output feedback fuzzy mixed H_2 / H_∞ tracking control design for nonlinear systems. The nonlinear system is represented by using the Takagi and Sugeno fuzzy model. A general and modified class of output-feedback tracking controller structure is assumed in each local control law. Using parallel distributed compensation, a fuzzy controller is proposed which not only satisfies a H_∞ tracking control constraint, but also optimally minimizes a H_2 control performance measure. The results of the proposed approach lead to a trade-off between the required tracking control and the amount of applied energy of the control input. In this approach, the problem formulation and the method of finding the controller parameters involve linear matrix inequalities. One particular example is given to illustrate the effectiveness of the obtained results in comparison with H_∞ -only approach from different perspectives.

Keywords

T-S fuzzy systems,
Tracking control,
Mixed ,
Linear matrix inequalities,
Optimal control.

۱- مقدمه

تئوری کنترل سیستمهای غیر خطی با موضوع پایدار سازی شروع می شود، به عنوان نمونه مرجع [۱] را ببینید. در طی سالیان اخیر عده کثیری از محققین با بکار گیری تئوری پایدار سازی لیاپانوفی^۱، رهیافت‌هایی را ارائه کرده اند. یک متد خاص که در این زمینه توسط محققین بسیاری مورد استفاده قرار گرفته است، بکارگیری روش مدلسازی تاکاگی - سوگنو (T-S) می باشد. در این رهیافت، سیستم غیر خطی اولیه با مجموعه ای از زیرسیستم‌های محلی خطی و توسط قوانین اگر-آنگاه مدل می شود. در دسته خاصی از این رهیافت، تابع لیاپانوف مناسب و ثابتی بر روی تمامی زیرسیستم‌های محلی خطی در نظر گرفته می شود. سپس با در نظر گرفتن تداخلات این زیر سیستمها با یکدیگر، یک کنترل کننده پایدار ساز محلی خطی برای هر زیر سیستم محلی طراحی می شود. کنترل کننده پایدار ساز نهایی در واقع مجموعه فازی تمامی این کنترل کننده های محلی خطی خواهد بود.

از لحاظ دیگر، توجه تنها به مسئله پایدار سازی مدل T-S برای اهداف کنترلی کافی نیست. برای نیل به طراحی یک کنترل کننده کامل، علاوه بر پایدارسازی، بایستی معیارهای متفاوت کنترلی نیز در نظر گرفته شوند. در این حالت سیستم حلقه بسته عملکرد مناسب کنترلی هم خواهد داشت. در رهیافت T-S، کنترل کننده خاص محلی بر اساس معیار کنترلی مورد نظر، بر روی هر زیر سیستم محلی خطی و با در نظر گرفتن تداخلات این زیر سیستمها با یکدیگر، طراحی می شود. به این روش طراحی کنترل کننده، رهیافت جبرانسازی توزیع شده موازی^۲ گفته می شود، به عنوان نمونه، مراجع [۲-۴] را ببینید. در سالهای اخیر، عده ای از محققین با بکار گیری تئوری نامساویهای ماتریسی خطی^۳، این رهیافت در مسئله کنترلی مدل T-S را توسعه داده اند، به عنوان نمونه مراجع [۵-۶] را ببینید. در بین معیارهای مختلف کنترلی، مسئله کنترل تعقیبی یکی از مهمترین اهداف در کنترل مدلهای T-S به شمار می رود. در حالت کلی، مسئله کنترلی تعقیبی مهمتر و پیچیده تر از پایدار سازی تنها می باشد. کاربردهای عملی این مسئله بسیار زیاد است. از جمله در کنترل موشکهای هدایت شونده، کنترل سیستمهای هوا-فضا، کنترل سیستمهای رباتیک، و غیره. در بین معیارهای متفاوت برای حل مسئله کنترل تعقیبی، معیار H_∞ اهمیت خاص خود را دارد.

مراجع متعددی به مسئله کنترلی بالاپرداخته اند. از جمله می توان به کنترل فازی تعقیبی با معیار H_∞ برای کنترل درجه حرارت سیستم راکتور مخزن همزن در [۷]، سیستمهای رباتیک [۸]، توربین بخار [۹]، بیولوژیکی مصنوعی تصادفی [۱۰]، سفینه های انعطاف پذیر فراصوت [۱۱]، کنترل تعقیبی موتورهای القایی خطی [۱۲]، پروفیل قدرت بهینه در راکتور هسته ای تحقیقاتی [۱۳]، کنترل رباتهای فضایی شناور-آزاد^۴ [۱۴]، کنترل تعقیبی سرعت موتورهای سنکرون^۵ PMSM [۱۵]، کنترل موقعیت سفینه های انعطاف پذیر [۱۶]، نیرو وارد کننده های پیزو الکترونیک [۱۷] و کنترل مسیر خودروهای خود مختار^۶ در [۱۸] اشاره نمود.

به منظور حل مسئله کنترل فازی تعقیبی با معیار H_∞ ، در ساختار فازی T-S برخی از محققین از روش فیدبک خطی ساز بهره برده اند، [۱۹-۲۲]. اما در این تکنیک نیاز به داشتن اطلاعات کامل و قطعی از سیستم غیر خطی تحت کنترل می باشد. تعداد دیگری

¹ Lyapunov Stabilization² Parallel Distributed Compensation³ Linear Matrix Inequalities⁴ Free-Floating⁵ Permanent Magnet Synchronous Motor⁶ Autonomous Vehicles

از محققین، از روشهای کنترل تطبیقی استفاده کرده‌اند، [۲۳-۲۹]. اما کنترل‌کننده‌های تطبیقی معمولاً برای بکارگیری عملی بسیار پیچیده هستند. مکانیزم کنترل بر اساس مود لغزشی^۱ نیز توسط تعداد دیگری از پژوهشگران به تنهایی و یا به عنوان مکمل کنترل‌کننده‌های تطبیقی مورد استفاده قرار گرفته است، [۳۰-۳۳]. دلیل اصلی استفاده از این نوع کنترل‌کننده‌ها، مقاوم بودن آنها نسبت به خطا در تقریب سیستم غیر خطی اولیه با دسته‌ای از زیر سیستم‌های خطی محلی فازی می باشد. اما نقطه ضعف این روش در پدیده وزوز^۲ است که پیاده سازی عملی آن را بسیار محدود می کند.

جدا از روش‌های مورد استفاده در منابع بالا، استفاده از ساختار کنترلی مشاهده گر حالت و کنترل با فیدبک حالت مشاهده شده، بر روی هر زیر سیستم خطی توسط تعداد دیگری از پژوهشگران بکار گرفته شده است. [۳۴-۳۷]. این طور به نظر می رسد که این روش نسبت به روش‌های تطبیقی و یا مود لغزشی و یا ترکیب آنها، کاراتر و از نظر پیاده‌سازی عملی نیز ساده تر است. اما جدا از مزایای سادگی روش مذکور و موفقیت آن در حل مسئله کنترل فازی تعقیبی با معیار H_∞ ، مواردی در این روش وجود دارد که نیاز مند بررسی بیشتر است. یک ایراد اساسی در این روش در همان روش کنترلی مشاهده گر حالت و فیدبک حالت مشاهده شده است. نامساوی‌های ماتریسی نهایی برای حل مسئله کنترل فازی تعقیبی با معیار H_∞ که این روش ارائه می دهد، دارای ساختار غیر خطی نسبت به ضرایب بهره‌های فیدبک حالت مشاهده شده و نیز ضرایب بهره‌های مشاهده گر حالت‌ها هستند. لذا در برخی از منابع برای رسیدن به پاسخ برای این نامساوی‌های ماتریسی غیر خطی، روش جدا سازی دو مرحله ای مورد استفاده قرار گرفته است. اما استفاده از این روش، از کلیت حل مسئله می کاهد و منجر به دسترسی به زیر مجموعه ای از تمامی جواب‌ها می شود. به علاوه، بکارگیری روش جدا سازی دو مرحله ای، ذاتاً به جواب‌های محافظه کارانه می انجامد. اخیراً در مرجع [۳۸] نوع کلی تر ساختار کنترل‌کننده و تعمیم آن به حالت کنترل تعقیبی ارائه شده است. در این رهیافت، پارامترهای کنترل‌کننده تعمیم یافته از حل یک دسته نامساوی‌های ماتریسی خطی و بدون اعمال هیچ فرض محدود کننده ای، حاصل می شوند. نقطه ضعف مهم دیگر در حل مسئله طراحی کنترل‌کننده تعقیبی فازی با معیار H_∞ که در تمامی روش‌های بالا وجود دارد، عدم توجه به انرژی مورد نیاز در خروجی کنترل‌کننده است. به عبارت دیگر، در تمامی روش‌های مذکور، خروجی کنترل‌کننده می تواند دامنه و یا انرژی زیادی را برای نیل به کاهش خطای تعقیب نیاز داشته باشد. علت پیدایش این نقطه ضعف، عدم وجود جمله مربعی متناظر با انرژی کنترلی مصرفی در معیار کنترلی H_∞ است. لذا بکارگیری عملی تمامی کنترل‌کننده‌های مورد بحث در منابع بالا، از این نظر بسیار محدود می شود. در معیار کنترلی H_∞ تمام تلاش طراح به کاهش هر چه بیشتر خطای تعقیب است. این امر موجب افزایش شدید مصرف انرژی سینگالهای کنترلی می شود. بنابر این منطقی به نظر می رسد که به نوعی مصالحه ای در کاهش هر چه بیشتر خطای تعقیب، با میزان مصرف انرژی کنترلی نیز در این مسئله کنترلی لحاظ شود. تلاش‌هایی توسط محققین برای رفع این نقصان در مراجع [۳۹-۴۵] انجام پذیرفته است. در مراجع [۳۹-۴۲] از رهیافت کنترل فازی تعقیبی با ضمانت تابع معیار استفاده شده است. اما نتایج [۳۹] با استفاده از فیدبک حالت عملی می شوند. در [۴۰] پارامترهای کنترل‌کننده نهایی از طریق حل عددی یک دسته نامساوی‌های ماتریسی دو خطی^۳ بدست می آیند. از آنجا که برای حل عددی این نوع از نامساوی‌ها، فرض‌های محدود کننده‌ای استفاده می شود، این رهیافت به نتایج محافظه کارانه‌ای منجر می شود. در منابع [۴۳-۴۵] با بکارگیری یک تابع معیار H_2 در کنار موازی یک تابع معیار H_∞

¹ Sliding Mode

² Chattering

³ Bilinear Matrix Inequalities

به محدود نمودن انرژی سیگنال کنترلی پرداخته شده است. اما این رهیافتها از نظر حل عددی پیچیده و نیز در مواردی، محدود به استفاده از فیدبک حالت هستند، لذا از نظر بکارگیری عملی مناسب نیستند.

در این مطالعه، به جای بکارگیری از روش طراحی کنترل کننده فازی تعقیبی با معیار H_∞ تنها، از روش کنترلی با معیار ترکیب H_2 و H_∞ و یا به عبارت دیگر ترکیب H_2 / H_∞ استفاده شده است. در این روش، در کنار فرمول بندی مسئله کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_∞ ، یک معیار اضافی H_2 نیز ضمیمه می شود. برقراری قید مربوط به معیار H_2 منجر به کاهش انرژی سیگنال کنترلی در عین نیل به خطای کم در تعقیب نمودن حالت مبنا می شود. لازم به ذکر است که در این مطالعه، کنترل کننده از اطلاعات خروجی و نه بردار حالت سیستم استفاده می نماید. در عین حال تمامی پارامترهای کنترل کننده تعمیم یافته، از حل یک دسته نامساوی-های ماتریسی خطی و نه غیر خطی و نه دوخطی بدست می آیند که به آسانی توسط بسته نرم افزاری MATLAB قابل حل عددی می باشند. ماحصل نتایج این مطالعه، به طراح سیستم کنترلی کمک می کند که با تنظیم یک ماتریس وزنی در معیار H_2 ، تعادلی بین میزان خطای تعقیب قابل قبول و انرژی استفاده شده برای حصول به این مقدار خطا برقرار نماید. در شبیه سازی های این روش ارائه شده در این مطالعه، کنترل تعقیبی با معیار ترکیبی H_2 / H_∞ از دیدگاههای مختلف با حالت ابتدایی H_∞ تنها مقایسه شده و ماحصل آن استفاده بهینه از انرژی سیگنال کنترلی و در عین حال دستیابی به عملکرد تعقیبی قابل قبول می باشد.

این مقاله به فرم زیر نگارش شده است. در بخش ۲، به فرمول بندی مدلسازی فازی از نوع T-S و معرفی ساختار کنترل کننده فازی با در نظر گرفتن معیارهای H_2 و H_∞ بطور جداگانه و نهایتاً فرمول بندی کامل مسئله کنترلی فازی تعقیبی بهینه با معیار ترکیبی H_2 / H_∞ پرداخته می شود. در بخش ۳، یک دسته نامساوی های ماتریسی خطی ارائه می شوند که در برگیرنده پاسخ مسئله ذکر شده در بخش ۲ می باشند. کنترل کننده دارای ساختار جبرانسازی توزیع شده موازی می باشد. از آنجا که مجموعه جواب تمامی کنترل کننده های ممکن، از حل یک دستگاه نامساوی های ماتریسی خطی بدست می آید، می توان با حل عددی یک مسئله بهینه سازی محدب، به کنترل کننده بهینه نهایی رسید. در بخش ۴، روش ارائه شده بر مبنای معیار ترکیبی H_2 / H_∞ این مقاله بر روی سیستم غیر خطی پاندول معکوس شبیه سازی می شود و با روش سنتی H_∞ تنها مقایسه می گردد. بخش ۵ نیز به جمع بندی نتایج اختصاص داده شده است.

۲- فرمول بندی مسئله

اول بار توسط تاکاگی و سوگو برای توصیف عملکرد یک سیستم غیر خطی با مجموعه ای از زیر سیستم های محلی خطی مدل فازی دینامیکی پیوسته در زمان یا همان مدل T-S از طریق توابع عضویت فازی معرفی شده است. هر زیر سیستم محلی خطی در واقع بایک قانون اگر-آنگاه توصیف می شود. این مدلسازی برای هر زیر سیستم محلی به صورت رابطه (۱) می باشد:

بخش دینامیکی قانون آ ام دستگاه:

If $\theta_1(t) \in \delta_{i1}$ and ... $\theta_r(t) \in \delta_{ir}$, then

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{i1} u(t) + B_{i2} w(t), \quad (1-f)$$

بخش خروجی قانون آ ام دستگاه:

If $\theta_1(t) \in \delta_{i1}$ and ... $\theta_r(t) \in \delta_{ir}$, then

$$y(t) = C_{1i} x(t) + C_{2i} v(t) \quad (۱-ب)$$

در معادلات مدلسازی (۱)، بیانگر مجموعه فازی است. زیرسیستم محلی خطی \dot{x} ام در واقع قانون \dot{x} ام مدل T-S می باشد. در رابطه (۱)، $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی کنترل، $v(t) \in \mathbb{R}^v$ بردار اختلال در ورودی سیستم با دامنه محدود، $y(t) \in \mathbb{R}^l$ بردار خروجی اندازه گیری شده سیستم و $w(t) \in \mathbb{R}^w$ بردار نویز اندازه گیری با دامنه محدود، می باشند. ماتریسهای $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B_{1i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $B_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times w}$ ، $C_{1i} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ و $C_{2i} \in \mathbb{R}^{l \times v}$ ماتریسهای معادلات حالت زیر سیستم خطی محلی \dot{x} ام می باشند و متغیر r تعداد قوانین فازی را بیان می کند. مدل T-S کامل سیستم غیر خطی به صورت رابطه (۲) بیان می شود:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [A_i x(t) + B_{1i} u(t) + B_{2i} w(t)] \quad (۲-الف)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [C_{1i} x(t) + C_{2i} v(t)] \quad (۲-ب)$$

در معادلات بالا

$$\mu_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^r \delta_{ij}(\theta_j(t)), h_i(\theta(t)) = \frac{\mu_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t))}, h_i(\theta(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) = 1. \quad (۳)$$

حال برای ورود به مساله کنترلی فازی تعقیبی، در ابتدا یک مدل مبنا به فرم (۴) در نظر گرفته می شود:

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r r(t) \quad (۴)$$

در مدل مبنا $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$ معرف بردار حالت مدل مبنا، $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ بیانگر یک ماتریس پایدار مجانبی و $r(t) \in \mathbb{R}^n$ ورودی مبنا به این مدل می باشد. برای تمامی زمانهای $t \geq 0$ ، بردار $x_r(t)$ یک مسیر مبنا برای بردار حالت $x(t)$ مدل T-S (۲) برای دنبال نمودن یا همان تعقیب نمودن ایجاد می کند. در اینجا مساله کنترل فازی تعقیبی با معیار H_∞ به فرم زیر بیان می شود:

$$\int_0^{t_f} \{ [x(t) - x_r(t)]^T Q [x(t) - x_r(t)] \} dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_f} \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) dt \quad (۵)$$

در معیار (۵)، بردار $\tilde{w}(t) = [w^T(t), v^T(t), r^T(t)]^T$ شامل تمامی اختلالات خارجی $w(t)$ ، همه نویز اندازه گیری $v(t)$ و نیز سیگنال $r(t)$ که همان سیگنال ورودی به سیستم مبنا است، می باشد. Q یک ماتریس وزنی مثبت نیمه معین و t_f زمان نهایی کنترل و γ سطح تضعیف از پیش تعیین شده نرم معیار خطای تعقیب H_∞ می باشد. برای نیل به چنین عملکرد کنترلی، کنترل کننده خطی (۶) در هر زیرسیستم خطی محلی به فرم زیر خواهد بود:

بخش دینامیکی قانون \dot{x} ام کنترل کننده:

¹ Premise Variables

If $\theta_1(t) \in \delta_{i1}$ and ... $\theta_r(t) \in \delta_{ir}$, and

If $\theta_1(t) \in \delta_{j1}$ and ... $\theta_r(t) \in \delta_{jr}$ then

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_c^{ij}x(t) + F_c^i x_r(t) + B_c^i y(t) \quad (6-f)$$

بخش خروجی قانون ام کنترل کننده:

If $\theta_1(t) \in \delta_{j1}$ and ... $\theta_r(t) \in \delta_{jr}$, then

$$u(t) = C_c^j \hat{x}(t) \quad (6-b)$$

کنترل کننده محلی (۶)، به فرم سنتی و محدود مشاهده گر حالت- فیدبک حالت مشاهده شده نیست. چهارترم $A_c^{ij}, B_c^i, C_c^i, F_c^i$ بیانگر حالت کلی و تعمیم یافته فیدبک خروجی برای حالت تعقیبی هستند. با در نظر گرفتن توابع عضویت فازی، کنترل کننده نهایی با ساختار موازی به صورت ترکیب فازی تمامی کنترل کننده‌های تعقیبی محلی به فرم زیر ارائه می شود:

ساختار کنترل کننده:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(t))h_j(\theta(t))[A_c^{ij}\hat{x}(t)] + \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))[F_c^i x_r(t)] + \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))[B_c^i y(t)] \\ u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t))[C_c^j \hat{x}(t)], \\ i, j = 1, 2, \dots, r. \end{array} \right. \quad (7)$$

حال اگر قانون کنترلی (۷) به مدل T-S (۲) اعمال شود، معادلات حالت سیستم حلقه بسته به فرم (۸) بدست می آیند:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \{ \tilde{A}_{ij} \hat{x}(t) + \tilde{E}_i \tilde{w}(t) \} \quad (8)$$

که در آن

$$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} B_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & B_c^i C_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} C_c^j & 0 \\ B_c^i C_{1j} & A_c^{ij} & F_c^i \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix},$$

می باشند. معیار کنترل تعقیبی H_∞ که در (۵) معرفی شد به فرم (۹) نیز قابل بیان می باشد:

$$\int_0^{t_f} \{ [x(t) - x_r(t)]^T Q [x(t) - x_r(t)] \} dt = \int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_f} \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) dt \quad (9)$$

که در آن ماتریس وزنی \tilde{Q} برابر

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & -Q \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q & 0 & Q \end{bmatrix},$$

است.

کنترل فازی تعقیبی با معیار H_∞ در صورت وجود جواب تضمین می کند که تاثیر هر سیگنال دلخواه و نامعین ولی کراندار $\tilde{w}(t)$ بر روی بردار خطای تعقیب $x(t) - x_r(t)$ با ماتریس وزنی Q ، برای یک مقدار مفروض γ در سیستم حلقه بسته تضعیف شود. حال لم ۱ که یک نتیجه استاندارد در تئوری کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_∞ می باشد، بدون اثبات ارائه می گردد:

لم ۱: قانون کنترلی (۷) یک قانون کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_∞ است، اگر یک ماتریس مثبت معین \tilde{P}_1 وجود داشته باشد که در تمامی دسته نامساویهای ماتریسی غیر خطی (۱۰) برای $i, j = 1, 2, \dots, r$ صدق کند.

$$\tilde{\Omega}^{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P}_1 + \tilde{Q} & \tilde{P}_1 \tilde{E}_i \\ \tilde{E}_i^T \tilde{P}_1 & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (10)$$

اگر چنین ماتریسی وجود داشته باشد، آنگاه رابطه:

$$\int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_f} \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) dt \quad (11)$$

برقرار می گردد.

نکته ۱: نامساویهای ماتریسی غیر خطی (۱۰) با استفاده از لم مکمل شور^۱ به فرم (۱۲) برای $i, j = 1, 2, \dots, r$ معادل سازی می شوند:

$$\Omega^{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P}_1 & \tilde{P}_1 \tilde{E}_i & \tilde{Q}^{1/2} \\ \tilde{E}_i^T \tilde{P}_1 & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{Q}^{T/2} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (12)$$

از آنجا که انرژی سیگنال کنترلی در معیار کنترل تعقیبی H_∞ ظاهر نمی شود، در نظر گرفتن این معیار برای نیل به حداقل نمودن خطای تعقیب منجر به استفاده از ورودیهای کنترلی $u(t)$ با دامنه بزرگ و با انرژی زیاد می شود. برای ایجاد یک تعادل نسبی بین تلاش حداکثر در کمینه سازی خطای تعقیب و نیز تلاش برای حداقل سازی در استفاده از سیگنالهای کنترلی با دامنه و انرژی زیاد، معیار کنترلی H_2 به مساله کنترلی فازی تعقیبی اضافه می شود. این معیار هزینه H_2 به صورت رابطه (۱۳) بیان می گردد:

$$J(\tilde{x}, u) = \int_0^{t_f} \{ \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) + u^T(t) \tilde{R} u(t) \} dt \quad (13)$$

طراح مساله کنترل فازی تعقیبی با انتخاب مناسب ماتریس دوم وزنی مثبت معین \tilde{R} قادر به اعمال محدودیتهایی در انرژی سیگنال

^۱ Schur Complements

کنترلی مصرف شده در عین حصول به حداقل نمودن خطای تعقیب خواهد بود. حال لم ۲ که یک نتیجه استاندارد در تئوری کنترلی فازی با معیار H_2 می باشد، بدون اثبات ارائه می گردد.

لم ۲: قانون کنترلی (۷) یک قانون کنترلی فازی با معیار H_2 است، اگر یک ماتریس مثبت معین \tilde{P}_2 وجود داشته باشد که در تمامی نامساویهای ماتریسی غیرخطی زیر برای $i, j = 1, 2, \dots, r$ صدق کند.

$$\tilde{\Delta}^{ij} = \tilde{P}_2 \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P}_2 + H_j^T \tilde{R} H_j + \tilde{Q} < 0 \quad (14)$$

که در آن،

$$H_j = [0 \quad C_j^i \quad 0]^T.$$

تکته ۲: نامساویهای ماتریسی غیرخطی (۱۴) با استفاده از لم مکمل شور به فرم (۱۵) برای $i, j = 1, 2, \dots, r$ تبدیل می شوند:

$$\Delta^{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P}_1 & H_j^T \tilde{R}^{1/2} & \tilde{Q}^{1/2} \\ \tilde{R}^{1/2} H_j & -I & 0 \\ \tilde{Q}^{T/2} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

در این حالت، در مورد تابع معیار هزینه فازی معیار H_2 در (۱۳) داریم:

$$J(\tilde{x}, u) \leq \tilde{x}^T(0) \tilde{P}_2 \tilde{x}(0)$$

حد بالا برای تابع معیار هزینه فازی H_2 به شرایط اولیه بستگی دارد. از آنجا که مقدار شرایط اولیه در بسیاری از موارد از ابتدا مشخص نیست، حد بالای (۱۶) برای تابع معیار فازی H_2 در نظر گرفته می شود:

$$J(\tilde{x}, u) \leq \text{Trace}(\tilde{P}_2) \quad (16)$$

در لم بالا مساله کنترل فازی تعقیبی با معیار H_∞ و کنترل فازی با معیار عملکرد هزینه H_2 بطور جداگانه در نظر گرفته شده اند. حال به منظور ارائه یک روش کنترلی فازی تعقیبی کامل، در ادامه معیار ترکیبی H_2 / H_∞ در قالب یک مساله کنترلی فازی بیان می شود.

مساله ۱: برای یک مقدار داده شده γ ، و با فرض وجود ماتریس مثبت معین $\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 = \tilde{P}$ که بطور همزمان در قیود (۱۲) و (۱۵) صدق کند، کنترل کننده ای بیابید که منجر به کمینه شدن $\text{Trace}(\tilde{P})$ می شود.

$$\begin{cases} \text{برای } \gamma \text{ مفروض:} \\ \text{Min}_{\tilde{P}} \text{Trace}(\tilde{P}) \\ \text{subject to (12), (15), } \tilde{P} > 0 \end{cases} \quad (17)$$

در بخش ۳ این مقاله یک رهیافت محدب بر اساس نامساویهای ماتریسی خطی به منظور یافتن پاسخ بهینه به مساله بالا ارائه می شود.

۳- طراحی کنترل کننده بهینه فازی تعقیبی با معیار ترکیبی H_2 / H_∞

قضیه ۱: سیستم با مدل T-S (۲) و مدل مبنای (۴) به همراه معیار کنترلی تعقیبی H_∞ (۹) و عملکرد مربعی با معیار H_2 (۱۳) را در نظر بگیرید. اگر ماتریسهای مثبت معین R, S, X و ماتریسهای $\bar{A}_c^i, \bar{B}_c^i, \bar{C}_c^i, \bar{F}_c^i$ وجود داشته باشند که نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۱۸) و (۲۷) را برای یک مقدار داده شده γ برآورده کنند، آنگاه قانون کنترلی (۷) یک قانون کنترلی فازی تعقیبی با معیار ترکیبی H_2 / H_∞ خواهد بود. پارامترهای کنترل کننده (۷) از پاسخ نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۱۸) و (۲۷) واز فرمول بندی (۲۶) تعیین می شوند.

نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۱۸) به ترتیب زیر هستند:

$$\psi^i < 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq r \quad (18)$$

$$\psi^i = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^i & \Psi_{12}^i & \Psi_{13}^i \\ * & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\Psi_{11}^i = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_i \mathbf{R} + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{C}}_c^i) + (\mathbf{A}_i \mathbf{R} + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{C}}_c^i)^T & \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{A}}_c^{iT} & \mathbf{0} \\ * & (\mathbf{S} \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{1i}) + (\mathbf{S} \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{1i})^T & \bar{\mathbf{F}}_c^i \\ * & * & \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_r^T \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{12}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_r \end{bmatrix}, \Psi_{13}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2} \\ -\mathbf{X} \mathbf{Q}^{1/2} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{2}{r-1} \psi^i + \Pi^{ij} + \Pi^{ji} < 0, \quad \text{for } 1 \leq i \neq j \leq r \quad (19)$$

جایی که:

$$\Pi^{ij} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}^{ij} & \Pi_{12}^{ij} & \Pi_{13}^{ij} \\ * & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

با

$$\Pi_{11}^{ij} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_i \mathbf{R} + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{C}}_c^i) + (\mathbf{A}_i \mathbf{R} + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{C}}_c^i)^T & \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{A}}_c^{iT} & \mathbf{0} \\ * & (\mathbf{S} \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{1j}) + (\mathbf{S} \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{1j})^T & \bar{\mathbf{F}}_c^i \\ * & * & \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_r^T \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{13}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{RQ}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2} \\ -\mathbf{XQ}^{1/2} \end{bmatrix} \Pi_{12}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_r \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Psi}^i < \mathbf{0} \text{ for } 1 \leq i \leq r \quad (20)$$

$$\hat{\Psi}^i = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^i & \hat{\Psi}_{12}^i & \Psi_{13}^i \\ * & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

جایی که

$$\hat{\Psi}_{12}^i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_c^{iT} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}^{1/2}.$$

$$\frac{2}{r-1} \hat{\Psi}^i + \hat{\Pi}^{ij} + \hat{\Pi}^{ji} < \mathbf{0}, \text{ for } 1 \leq i \neq j \leq r \quad (21)$$

$$\hat{\Pi}^{ij} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}^{ij} & \hat{\Pi}_{12}^{ij} & \Pi_{13}^{ij} \\ * & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \hat{\Pi}_{12}^{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_c^{iT} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}^{1/2}.$$

اثبات: در ابتدا دسته نامساویهای ماتریسی غیر خطی (۱۲) در نظر گرفته می شوند. شروط معادل برای این که این دسته نامساویهای

ماتریسی غیر خطی برقرار باشند، به فرم زیر قابل بیان هستند:

$$\begin{cases} \Omega^{ii} < \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ \frac{2}{r-1} \Omega^{ii} + \Omega^{ij} + \Omega^{ji} < \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \neq j \leq r \end{cases} \quad (22)$$

حال به دسته اول نامساویهای ماتریسی غیر خطی (۲۲) پرداخته می شود:

$$\Omega^{ii} < \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

بایستی به نحوی این دسته نامساویهای ماتریسی غیر خطی به فرم خطی تبدیل شوند. در ابتدا ماتریسهای $\tilde{\mathbf{P}}$ و $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ به صورت زیر

تقسیم بندی می گردند:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_r \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}_r, \mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (23)$$

در این قسمت از تساوی، $\tilde{P}\tilde{P}^{-1} = I$ روابط زیر به دست می آیند:

$$MN^T = I - RS, P_r X = I. \quad (24)$$

حال دو ماتریس واسطه ای زیر ترتیب بندی می شوند:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} R & I & 0 \\ M^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix}, \varphi_2 = \begin{bmatrix} I & S & 0 \\ 0 & N^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tilde{P}\varphi_1 = \varphi_2 \quad (25)$$

و یک مجموعه جدید از متغیرهای کنترلی (۲۶) تعریف می گردند:

$$\begin{cases} \bar{A}_c^{ij} = SA_i R + NB_c^i C_j R + SB_i C_c^j M^T + NA_c^{ij} M^T \\ \bar{B}_c^i = NB_c^i \\ \bar{C}_c^i = C_c^i M^T \\ \bar{F}_c^i = NF_c^i X \end{cases} \quad (26)$$

متغیرهای ضمنی کمکی بالا در واقع جایگزین متغیرهای صریح در فرم کنترل کننده (۷) هستند. این تعریف متغیرهای کمکی، یک نقش کلیدی در تبدیل نامساویهای ماتریسی غیر خطی به فرم نامساویهای ماتریسی خطی دارد.

حال اگر نامساویهای ماتریسی غیر خطی $\Omega^{ii} < 0$ از طرف راست در $T_1 = \text{diag}\{\varphi_1, I, I\}$ و از طرف چپ در T_1^T ضرب شوند و سپس از دسته متغیرهای جدید (۲۶) بهره گرفته و در آن جایگزین گردند، آنگاه به نامساویهای ماتریسی خطی (۱۸) خواهیم رسید. با بکارگیری همین روند، می توان دسته نامساویهای ماتریسی غیر خطی

$$\frac{2}{r-1} \Omega^{ii} + \Omega^{ij} + \Omega^{ji} < 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq r,$$

و دسته نامساویهای ماتریسی غیر خطی

$$\begin{cases} \Delta^{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, r, \\ \frac{2}{r-1} \Delta^{ii} + \Delta^{ij} + \Delta^{ji} < 0, 1 \leq i \neq j \leq r, \end{cases}$$

را به دسته نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۲۰) تبدیل نمود.

از آنجا که ماتریس \tilde{P} مثبت معین فرض شده است، رابطه نامساوی خطی زیر نیز به مجموعه نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۱۸) اضافه خواهد شد.

$$\varphi_1^T \tilde{P} \varphi_1 = \varphi_1^T \varphi_2 = \begin{bmatrix} R & I & 0 \\ I & S & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix} > 0, \quad (27)$$

حال اگر برای یک مقدار داده شده γ ، نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۱۸) و (۲۷) دارای جواب باشند، با معلوم بودن ماتریسهای مثبت معین R, S, X و بدست آوردن ۲ ماتریس M, N از رابطه (۲۴) و با در اختیار داشتن ماتریسهای $\bar{A}_c^{ij}, \bar{B}_c^i, \bar{C}_c^i, \bar{F}_c^i$ پارامترهای صریح اولیه کنترل کننده (۷) یعنی $F_c^i, B_c^i, C_c^i, A_c^{ij}$ بطور یکتا از رابطه (۲۶) حاصل می گردند. با این کار، اثبات قضیه به اتمام می رسد.

لازم به ذکر است که در قضیه بالا دسته نامساویهای ماتریسی خطی (۱۹-۱۸) مربوط به برقراری قید کنترلی فازی تعقیبی H_∞ (۹) و دسته نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۲۰) مربوط به عملکرد مربعی فازی با معیار H_2 (۱۴) هستند.

نکته ۳: مسئله ۱ در بخش ۲ که توسط رابطه (۱۷) تعریف شده بود، را دوباره در نظر بگیرید. حال این مسئله به فرم زیر قابل بیان است:

مسئله ۲: "برای یک میزان داده شده γ ، و با فرض وجود جواب در قضیه او برقراری نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۱۸) و (۲۷)، کنترل کننده ای بیابید که منجر به کمینه شدن $\text{Trace}(\tilde{P})$ شود."

از آنجا که برای حل این مساله بهینه سازی در این فرمول بندی به مقدار متغیر ماتریس \tilde{P} دسترسی نداریم، نیاز به تعریف یک ماتریس کمکی جدید جایگزین خواهیم داشت. این ماتریس باعث می شود که مساله بهینه سازی بالا به فرم محدب بیان شود.

$$\begin{bmatrix} Z & \tilde{P} \\ \tilde{P} & \tilde{P} \end{bmatrix} > 0.$$

اگر این نامساوی ماتریسی خطی را از طرف راست در $T_2 = \text{diag}\{I, \phi_1\}$ و از طرف چپ در (T_2^T) ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Z & \begin{bmatrix} I & S & 0 \\ 0 & N^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ * & \begin{bmatrix} R & I & 0 \\ I & S & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0.$$

یک تحقق مناسب با تعریف: $M = R - S^{-1}, N = -S$ حاصل می گردد.

$$\begin{bmatrix} Z & \begin{bmatrix} I & S & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ * & \begin{bmatrix} R & I & 0 \\ I & S & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0. \quad (28)$$

در نتیجه فرمول بندی نهایی مسئله ۲، به صورت یک فرمول بندی بر اساس نامساویهای ماتریسی خطی و یک مساله بهینه سازی محدب تعریف خواهد شد:

مساله ۳: "برای یک میزان داده شده γ ، و با فرض وجود جواب در قضیه ۱ و برقراری نامساویهای ماتریسی خطی (۲۱-۱۸) و (۲۷) و (۲۸)، کنترل کننده ای بیابید که منجر به کمینه شدن $\text{Trace}(Z)$ شود."

بدین ترتیب پاسخ مساله ۳ به صورت (۲۹) بدست می آید:

$$\begin{cases} \text{For a given } \gamma \\ \text{Min Trace}(Z) \\ \text{subject to (18-21), (27), (28)} \end{cases} \quad (29)$$

مساله بهینه سازی (۲۹)، یک مساله بهینه سازی محدب است.

نکته ۴: اگر در بیان نهایی پاسخ مساله بهینه سازی (۲۹) به کمترین مقدار γ در معیار کنترلی ترکیبی H_2 / H_∞ دست پیدا کنیم، بهترین حالت کنترل تعقیبی حاصل می شود. خوشبختانه این جستجو برای مینیمم سازی γ نیز میتواند با روال ساده‌ای به جواب برسد. در این حالت، بایستی مسئله (۲۹) را از یک مقدار اولیه γ شروع کرد. اگر رابطه (۲۹) دارای جواب بوده، یا به عبارت دیگر کنترل بهینه متناظر آن وجود داشته باشد، آنگاه مقدار γ را، کاهش داده (بطور نمونه آن را نصف می کنیم) و دوباره مساله را حل می کنیم. این روند تا آنجا ادامه داده می شود که به کمترین مقدار γ ممکن برسیم. در این حالت به جواب بهینه نهایی مساله کنترل فازی تعقیبی با معیار ترکیبی H_2 / H_∞ خواهیم رسید.

نکته ۵: برای کامل کردن رهیافت طراحی کنترل کننده، و برای به صفر رساندن خطای تعقیبی در حالت ماندگار برای ورودیهای DC، یک دسته پارامترهای ایستا معرفی می شوند. یک هدف غایی، صفر شدن خطای تعقیب در حالت ماندگار برای این دسته از ورودیهاست. عبارت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_k(t)}{x_{rk}(t)} = 1, \text{ for } k = 1, \dots, n \quad (30)$$

در رابطه (۳۰) $x_k(t)$ و $x_{rk}(t)$ به ترتیب معرف مولفه k -ام بردار حالت سیستم (۱) و بردار حالت سیستم مبنای (۴) می باشند. رابطه (۳۰) در حوزه زمان است، بیان دیگر آن در حوزه فرکانس به صورت رابطه (۳۱) خواهد بود:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{X_k(s)}{X_{rk}(s)} = 1, \text{ for } k = 1, \dots, n \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)، $X_k(s)$ و $X_{rk}(s)$ به ترتیب معرف تبدیل لاپلاس $x_k(t)$ و $x_{rk}(t)$ هستند. اگر سیگنال $I(t)$ در رابطه (۴) یک ورودی اسکالر فرض شود، خواهیم داشت:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{X_k(s)}{X_{rk}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{X_k(s)}{R(s)} \right) \times \left(\frac{R(s)}{X_{rk}(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{X_k(s)}{R(s)} \right) \times \left(\frac{X_{rk}(s)}{R(s)} \right)^{-1}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{C}_k (sI - \tilde{A}_{ij})^{-1} \bar{B}}{C_{rk} (sI - A_r)^{-1} B_r}, \text{ for } k = 1, \dots, n$$

پارامترهای جدید در فرمول بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{C}_k \in \mathbb{R}^{1 \times 3n}, \bar{C}_k(i) = 0, \text{ for } i = 1, \dots, 3n \text{ and } i \neq k, \bar{C}_k(i) = 1, \text{ for } i = k.$$

$$\bar{B} \in \mathbb{R}^{3n \times 1}, \bar{B}^T = [0, 0, \dots, B_r],$$

$$C_{rk} \in \mathbb{R}^{1 \times n}, C_{rk}(i) = 0, \text{ for } i = 1, \dots, n \text{ and } i \neq k, C_{rk}(i) = 1, \text{ for } i = k$$

حال بهره های استاتیکی مورد نظر از فرمول (۳۲) قابل محاسبه خواهند بود:

$$K_{ij}^k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_{rk} (sI - A_r)^{-1} B_r}{\bar{C}_k (sI - \tilde{A}_{ij})^{-1} \bar{B}}, \text{ for } k = 1, \dots, n \quad (32)$$

با محاسبه این بهره های استاتیکی و تاثیر آنها در بردار حالت مدل مینا به فرم

$$x_r(t) \Rightarrow \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j K_{ij}^k x_{rk}(t), \text{ for } k = 1, \dots, n.$$

منجر به صفر شدن خطای حالت ماندگار در کنترل فازی تعقیبی با معیار ترکیبی H_2 / H_∞ ، برای ورودیهای DC یا مربعی با فرکانس پایین خواهد شد. با این کار طراحی کنترل کننده فازی تعقیبی کامل می شود.

۴- مثال شبیه سازی

در این بخش از مقاله، سیستم کنترلی پاندول معکوس را که سیستم غیر خطی پیچیده ای محسوب می شود، در نظر گرفته و نتایج بدست آمده از قضیه ۱ و نکات ۳ و ۴ و ۵ را بر روی این سیستم پیاده سازی می نمایم. لازم به ذکر است که این مسئله کنترلی در بسیاری از مراجع مورد بررسی قرار گرفته است. این سیستم با معادلات دینامیکی زیر توصیف می شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g \sin(x_1(t)) - a m l x_2^2(t) \sin(2x_1(t)) / 2 - \cos(x_1(t)) u(t)}{4 \frac{l}{3} - a m l \cos^2(x_1(t))} + w(t), \\ y(t) = x_1(t) + v(t) \end{cases}$$

در روابط بالا متغیر حالت $x_1(t)$ ، زاویه پاندول از محور قائم بر حسب رادیان، متغیر حالت $x_2(t)$ ، سرعت زاویه ای محور پاندول با واحد رادیان بر ثانیه و $u(t)$ سیگنال تولیدی کنترلی است که به سیستم اعمال می شود. سیگنالهای $w(t)$ و $v(t)$ معرف اختلالات خارجی و نویز اندازه گیری هستند. مقادیر پارامترهای مختلف در سیستم بالا عبارتند از $M = 8 \text{ kg}$, $m = 2 \text{ kg}$, $l = 0.5 \text{ m}$.

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T: \text{اگر داشته باشیم}$$

آنگاه مدل T-S شامل دو قانون مطابق (۲) با پارامترهای زیر تعریف می شود:

$$a = \frac{1}{M+m}, \beta = \cos\left(\frac{88\pi}{180}\right)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = C_{21} = [1 \quad 0], C_{12} = C_{22} = 1.$$

برای ماتریس A_r در (۴) مقدار $A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ در نظر گرفته می شود. برای ماتریس Q در معیار عملکرد تعقیبی H_∞ (۹)،

مقدار $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فرض می شود. برای اسکالر \tilde{R} در تابع هزینه H_2 (۱۲) مقدار $\tilde{R} = 8e-10$ فرض می گردد. در ابتدا

مساله تعقیبی فازی H_∞ تنها را بدون در نظر گرفتن جزء مربوط به تابع هزینه H_2 بررسی می کنیم. مقدار نهایی بهینه $\gamma_{opt}^2 = 4$ بدست می آید. در ادامه، مساله کنترل بهینه تعقیبی ترکیبی H_2/H_∞ در نظر گرفته شده و با استفاده نتایج قضیه ۱ و نکات تکمیلی ۳ و ۴ مقدار بهینه $\gamma_{opt}^2 = 5$ حاصل می گردد. در این حالت، پارامترهای کنترل کننده تعقیبی به فرم (۷) به شرح زیر خواهند بود:

$$A_c^{11} = 1 * 10^3 \begin{bmatrix} -0.04 & 0 \\ -5.29 & -0.27 \end{bmatrix}, B_c^1 = \begin{bmatrix} 15.18 \\ 56.09 \end{bmatrix}, C_c^1 = 1 * 10^4 [2.93 \quad 0.15], F_c^1 = \begin{bmatrix} -3.04 & 0 \\ -11.37 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c^{22} = 1 * 10^3 \begin{bmatrix} -0.04 & 0 \\ -1.93 & -0.09 \end{bmatrix}, B_c^2 = \begin{bmatrix} 15.54 \\ 58.77 \end{bmatrix}, C_c^2 = 1 * 10^5 [3.30 \quad 0.1693], F_c^2 = \begin{bmatrix} -3.04 & 0 \\ -11.34 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c^{12} = 1 * 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5.84 & -0.29 \end{bmatrix}, A_c^{21} = \begin{bmatrix} -61.66 & -1.37 \\ -408.04 & -18.41 \end{bmatrix}$$

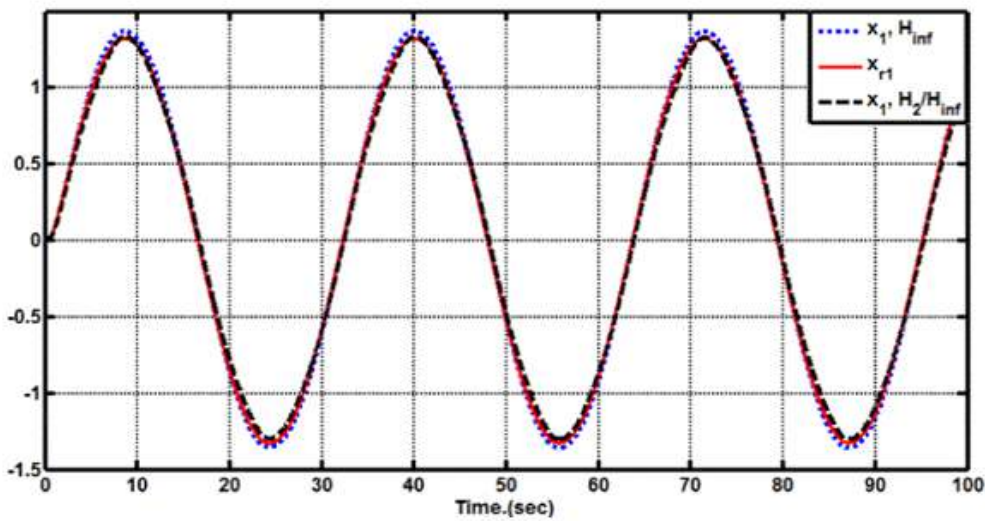
برای مقادیر مربوط به ضرایب تنظیمی ایستا که در نکته ۵ به آنها اشاره شد، مقادیر زیر بدست می آیند:

$$K_{11}^1 = 2.82, K_{12}^1 = 3.78, K_{21}^1 = 2.92, K_{22}^1 = 2.34.$$

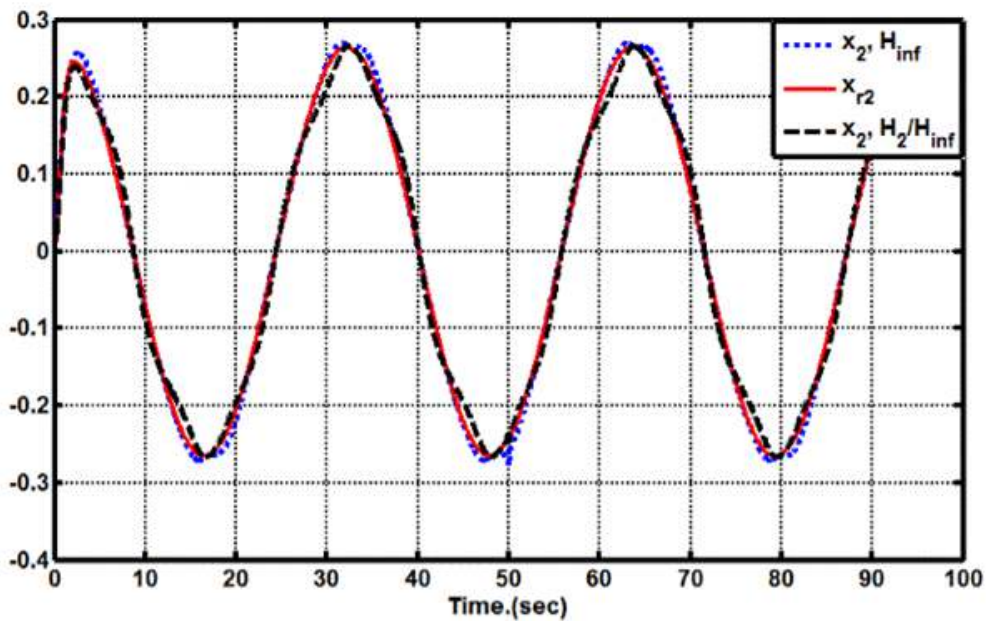
$$K_{11}^2 = 1, K_{12}^2 = 1, K_{21}^2 = 1, K_{22}^2 = 1.$$

از آنجا که در حالت ترکیبی H_2/H_∞ ، باید دو دسته نامساوی ماتریسی خطی برقرار باشند، طبیعی است که نسبت به حالت H_∞ تنها، مقدار γ بهینه کمی بیشتر شده باشد. اما همانگونه که نتایج شبیه سازی نشان خواهند داد، این افزایش، تاثیر چندانی در عملکرد تعقیبی کنترل کننده نخواهد داشت. به علاوه در حالت مربوط به معیار تعقیبی ترکیبی H_2/H_∞ ، عملکرد تعقیبی مناسب با استفاده از سیگنال کنترلی با مقادیر به مراتب کمتر از حالت H_∞ تنها حاصل می شود. در شبیه سازی نتایج، سیگنال $r(t) = 8\sin(0.2t)$ فرض شده است. سیگنال اختلال $w(t)$ یک سیگنال سینوسی با دامنه کم و نویز اندازه گیری $v(t)$ ، نویز سفید فرض شده اند. شکل شماره ۱ نمایانگر سیگنال مرجع $x_{r1}(t)$ و پاسخ سیستم غیر خطی برای تعقیب این سیگنال در دو حالت H_∞ تنها و حالت ارائه شده در این مقاله، یعنی حالت ترکیبی H_2/H_∞ می باشد. شکل شماره ۲، همین روال را برای متغیر حالت دوم سیستم غیر خطی، یعنی

$x_2(t)$ به تصویر کشیده است. هر دو شکل مورد نظر، عملکرد تعقیبی خوبی را برای حالت ترکیبی H_2/H_∞ در قیاس با حالت H_∞ تنها نشان می دهند.

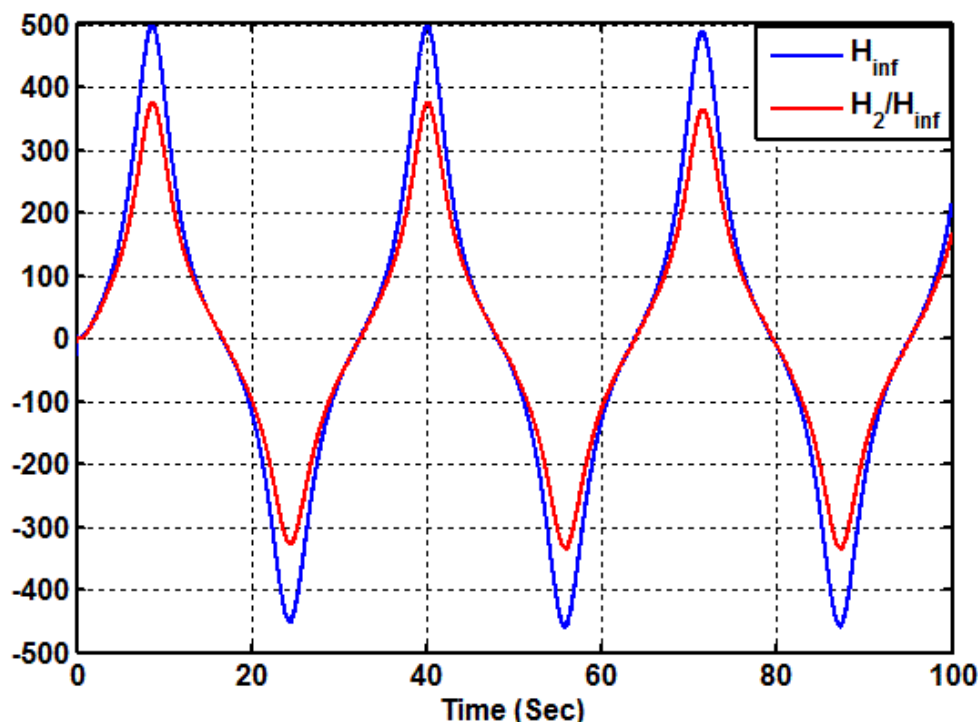


شکل ۱. مقایسه عملکرد تعقیبی دامنه متغیر حالت $x_1(t)$ در دو حالت، H_∞ تنها و حالت ترکیبی H_2/H_∞



شکل ۲. مقایسه عملکرد تعقیبی دامنه متغیر حالت $x_2(t)$ در دو حالت، H_∞ تنها و حالت ترکیبی H_2/H_∞

شکل شماره ۳، سیگنال کنترلی $u(t)$ را در دو حالت مورد مقایسه نشان می دهد. همانطور که به وضوح در شکل ۳ مشاهده می شود، دامنه سیگنال کنترلی در حالت ترکیبی H_2/H_∞ بسیار کمتر نسبت به حالت H_∞ تنها است. در عین حالی که عملکرد تعقیبی دو رهیافت که در شکل های ۱ و ۲ نمایش داده شده بودند، تفاوت آنچنانی نداشتند. اگر بطور نسبی مقایسه شود، بیشینه دامنه $u(t)$ در حالت ترکیبی نسبت به حالت اولیه دارای کاهش قابل توجه ۲۴٪ می باشد.



شکل ۳. مقایسه دامنه شکل موج ورودی کنترل $u(t)$ به سیستم غیر خطی در دو حالت، H_∞ تنها و حالت ترکیبی H_2/H_∞ . جدول زیر یک مقایسه کامل را برای حالت H_∞ تنها و حالت ترکیبی H_2/H_∞ ارائه می‌دهد. این جدول به وضوح نشان می‌دهد که ماتریس وزنی \tilde{R} در معیار ترکیبی مانند یک ضریب وزنی قابل تنظیم برای ایجاد یک مصالحه بین مقدار انرژی مصرف شده از سیگنال کنترلی و میزان خطای تعقیب عمل می‌کند. طراح سیستم کنترل می‌تواند با بکارگیری و تنظیم اندازه ماتریس وزنی \tilde{R} در معیار ترکیبی H_2/H_∞ به حالت بهینه جدیدی نسبت به حالت H_∞ تنها برسد.

جدول ۱. مقایسه کامل برای انرژی کنترلی و انرژی خطای تعقیبی در ۲ حالت H_∞ تنها و حالت ترکیبی H_2/H_∞

$\tilde{R} (1e-10)$	گاما دو بهینه		$J(e)$		$(1e-5) J(u)$		
	H_∞	معیار ترکیبی H_2, H_∞	H_∞	معیار ترکیبی H_2, H_∞		معیار ترکیبی H_2, H_∞	درصد کاهش در انرژی سیگنال کنترلی در ۲ حالت H_∞ تنها و حالت معیار ترکیبی H_2 و H_∞
۰/۳	۴	۴/۶۲	۰/۱۱۴	۰/۱۱۸	۱۱/۶۵	۱۱/۶۵	۲۹/۸۵
۰/۵		۴/۶۴		۰/۱۱۹	۲۷/۷	۱۹/۱۷	۳۰/۷۷
۰/۷		۴/۷		۰/۱۲	۳۸/۷۸	۲۶/۱۵	۳۲/۵۵
۰/۸		۴/۸		۰/۱۲۴	۴۴/۳۲	۲۹/۷۶	۳۲/۸۵
۱		۴/۹		۰/۱۳	۴,۵۵	۳۷/۰۶	۳۳/۱
۴		۴/۹۵		۰/۱۶	۲۲۱/۶	۱۴۵/۷	۳۴/۲۲
۸		۵		۰/۲۵	۴۴۳/۲	۲۵۱/۸۲	۴۳/۱۸

در جدول بالا، مقادیر γ_{opt}^2 به همراه مقدار مربعی برای سیگنال خطا $J(e) = \int_0^{100} (e^T Q e) dt$ و مقدار متناظر مربعی برای سیگنال

ورودی کنترل یعنی: $J(u) = \int_0^{100} u^T(t) \tilde{R} u(t) dt$ محاسبه شده اند. برای نمونه، اگر $\tilde{R} = 8e - 10$ منظور شود، مقدار انرژی سیگنال

کنترلی مصرفی برای تعقیب حالت مینا، برابر $443.2e - 5$ برای حالت H_∞ تنها است که با مقدار متناظر آن در حالت ترکیبی H_2 / H_∞ که برابر $251.82e - 5$ می باشد، مقایسه می شود. این مقایسه، کاهش $1/43\%$ را نشان می دهد. در حالیکه همانطور که مشاهده شد، عملکرد تعقیبی این دو حالت تفاوت آنچنانی نداشتند. این امر، حاصل اضافه نمودن معیار H_2 به مساله کنترلی تعقیبی H_∞ است. جدول بالا، ایجاد یک مصالحه بین عبارت مرتبه دوم خطای تعقیب در عین محدود نمودن عبارت مربعی انرژی کنترلی مصرفی را برای مقادیر متفاوت و انتخابی \tilde{R} ارائه می دهد. بکارگیری جدول بالا به یک طراح سیستم کنترلی برای حل مساله کنترل فازی تعقیبی کمک می کند که انتخاب های متفاوتی داشته باشد. در واقع بیانگر یک تعادل بین مقدار انرژی مصرف شده از سیگنال کنترلی و میزان خطای تعقیب می باشد.

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه به بررسی مساله کنترل فازی تعقیبی به فرم جبران سازی توزیع شده موازی برای سیستم های غیر خطی مدل شده با روش T-S پرداخته شد. کنترل کننده نهایی بر اساس فیدبک خروجی و دارای فرم تعمیم یافته به حالت کنترلی تعقیبی است. برای نیل به یک عملکرد مناسب کنترلی، به جای استفاده از معیار H_∞ تنها، معیار ترکیبی H_2 / H_∞ بکار گرفته شده است. پارامترهای کنترل کننده از حل یک دستگاه نامساوی های ماتریسی خطی بدست می آیند. کنترل کننده نهایی، یک کنترل کننده فازی تعقیبی بهینه است که مقدار کمینه آن از حل یک مساله بهینه سازی محدب بدست می آید. شکل های شبیه سازی ها و محاسبات مقایسه ای نشان داد که در حالت ترکیبی، امکان حصول به یک توازن نسبی بین هر چه کمتر کردن خطای تعقیب و در عین حال، هر چه کمتر نمودن انرژی و دامنه سیگنال کنترلی فراهم می شود.

مراجع

- [1] S. Sastry, 'Nonlinear systems, analysis, stability and control', Springer, 1999.
- [2] T. Takagi, and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Transactions on System, Man, Cybernetics, 1985, vol. 15, no. 1, pp. 116-132.
- [3] T. Takagi, and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems", Elsevier, Fuzzy Sets and Systems, 1992, vol. 45, no. 2, pp. 135-156.
- [4] H.O. Wang, K. Tanaka, and M.F. Griffin, "An Approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, vol. 4, no. 1, pp. 14-23.
- [5] K. Tanaka, and H.O. Wang, 'Fuzzy control systems design and analysis, A linear matrix inequality approach', John Wiley & Sons, 1st edition, 2001.
- [6] H.K. Lam, and L.D. Seneviratne, "LMI-based stability design of fuzzy controller for nonlinear systems", IET Control Theory and Applications, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 393-401.

- [7] S. Salehi, and M. Shahrokhi, "Adaptive fuzzy approach for H_∞ temperature tracking control of continuous stirred tank reactors", Elsevier, Control Engineering Practice. 2008, vol.16, no. 9, pp. 1101-1108.
- [8] C.-K. Lin, "Fuzzy-Basis-Function-Network-Based H_∞ tracking control for robotic manipulators using only position feedback", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2009, vol. 17, no. 5, pp. 1208-1216.
- [9] J. Wu, S.K. Nguang, J. Shen, G. Liu, and Y.G. Li, "Robust H_∞ tracking control of boiler-turbine systems", Elsevier, ISA Transactions, 2010, vol. 49, no. 3, pp. 369-375.
- [10] B.-S. Chen, and C.H. Wu, "Robust reference-tracking design method for stochastic synthetic biology systems: T-S fuzzy approach", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2010, vol. 18, no. 6, pp. 1144-1159.
- [11] X. Hu, L. Wu, C. Hu, and H. Gao, "Fuzzy guaranteed cost tracking control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle", IET Control theory and Applications, 2011, vol. 6, no. 9, pp. 1238-1249.
- [12] C.-Y Hung, P. Liu, and K.-Y Lian, "Fuzzy virtual model sensor-less tracking control for linear induction motors", IEEE Transaction on Cybernetics, 2013, vol. 43, no. 3, pp. 970-981.
- [13] E. Rojas-Ramirez, J.S. Benitez-Read, and A.S.D.L. Rios, "A stable adaptive fuzzy control scheme for tracking an optimal power profile in a research nuclear reactor", Elsevier, Annals of Nuclear Energy, 2013, vol. 58, pp. 238-245.
- [14] Z.Y. Chu, J. Cui, and F.C. Sun, "Fuzzy adaptive disturbance observer-based robust tracking control of electrically driven free-floating space manipulators", IEEE Systems Journal, 2014, vol. 8 no.2, pp. 343-352.
- [15] Y.-C. Chang, C.-H. Chen, Z.-C. Zhu, and Y.-W. Huang, "Speed control of the surface-mounted permanent-magnet synchronous motor based on takagi-sugeno fuzzy models", IEEE Transactions on Power Electronics, 2016, vol. 31, no. 9, pp. 6504-6510.
- [16] C. Sendi, and M.A. Ayoubi, "Robust fuzzy tracking control of flexible spacecraft t-s fuzzy model", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 170-179.
- [17] L. Cheng, W. Liu, Z.-G. Hou, T. Huang, J. Yu, and M. Tan, "An adaptive takagi-sugeno fuzzy model based predictive controller for piezoelectric actuators", IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, vol. 64, no. 4, pp. 3048-3058.
- [18] C. Zhang, J. Hu, J. Qiu, W. Yang, H. Sun, and Q. Chen, "A novel fuzzy observer-based steering control approach for path tracking in autonomous vehicles", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, vol. 27, no. 2, pp. 278-290.
- [19] H Ying, "Analytical analysis and feedback linearization tracking control of the general takagi-sugeno fuzzy dynamic systems", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews), 1999, vol. 29, no. 3, pp. 290-298.
- [20] W. J. Wang, and H. R. Lin, "Fuzzy control design for the trajectory tracking on uncertain nonlinear systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, vol. 7, no. 1, pp. 53-62.
- [21] C.I. Pop, C. Festila, E.H.Dulf and B. Muresan, "Feedback linearization control design for the ^{13}C cryogenic separation column", 2010 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics (AQTR), vol. 1, pp. 157- 163.

- [22] M.C Tanaka, J.M.D.M. Ferrnandes and W.M. Bessa, "Feedback linearization with fuzzy compensation for uncertain nonlinear systems", International Journal of Computer Communications, Computers & Control (IJCCC), 2013, vol. 8, no. 5, pp. 736-743.
- [23] T.-S. Li, S.-C. Tong, and G. Feng, "A novel robust adaptive-fuzzy tracking control for a class of nonlinear multi-input/multi-output systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 150-160.
- [24] Q. Zhou, P. Shi, S. S. Xu, and H. Li, "Adaptive output feedback control for nonlinear time-delay systems by fuzzy approximation approach", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 301-313.
- [25] H.X. Li, and S.C. Tong, "A hybrid adaptive fuzzy control for a class of nonlinear systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems", 2003, vol. 11, no. 1, pp. 24-34.
- [26] Y.J. Liu, S.C. Tong, and W. Wang, "Adaptive fuzzy output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems", Elsevier, Fuzzy Sets and Systems, 2009, vol. 160, no. 1, pp. 2727-2754.
- [27] Y.-J. Liu, S.C. Tong, and T.S. Li, "Observer-based adaptive fuzzy tracking control for a class of uncertain nonlinear MIMO systems", Elsevier, Fuzzy Sets and Systems, 2011, vol. 164, no. 1, pp. 25-44.
- [28] Y.-J. Liu, W. Wang, S. C. Tong, and Y.S. Liu, "Robust Adaptive tracking control for nonlinear systems based on bounds of fuzzy approximation parameters", IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics. Part A: Systems and Humans, 2010, vol. 40, no.1, pp. 170-184.
- [29] Y.-T. Chang and B.S. Chen, "A fuzzy approach for robust reference-tracking-control design of nonlinear distributed parameter time-delayed systems and its applications", IEEE Transactions on Fuzzy System, 2010, vol.18, no. 6, pp. 1041-1057.
- [30] C.C. Kung, and T.H. Chen, " H_∞ tracking based adaptive fuzzy sliding mode controller design for nonlinear systems", IET Control Theory and Applications, 2007, vol. 1, no. 1, pp. 82-89.
- [31] F. Piltan, M. Bazregar, A.R. Nabae and M.M. Ebrahimi, "Design robust fuzzy sliding mode control technique for robot manipulator systems with modeling uncertainties", International Journal of Information Technology and Computer Science (IJITCS), 2013, vol. 5, no. 8, pp. 123-135.
- [32] S. Bououden, M. Chadi, and H.R. Karimi, "Fuzzy sliding mode controller design using Takagi-Sugeno-modeled nonlinear systems", Mathematical Problems in Engineering, 2013, vol. 2013, Article ID 734094.
- [33] C.-L. Hwang, C.C. Chiang, and Y.W. Yeh, "Adaptive fuzzy hierarchical sliding-mode control for trajectory tracking of uncertain under-actuated nonlinear dynamic systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, vol. 22, no. 2, pp. 286-299.
- [34] C. Tseng, B. Chen, and H. Uang, "Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2001, vol. no.3, pp.381-392.

- [35] C. Tseng, "Model reference output feedback fuzzy tracking control design for nonlinear discrete-time systems with time-delay", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, vol. 14, no. 1, pp. 58-70.
- [36] C. Lin, Q. Wang, and T. Lee, H_∞ output tracking control for nonlinear systems via T-S fuzzy model approach, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 2006, vol. 36, no. 2, pp. 450-457.
- [37] C. Lin, Q. Wang, T. Lee, and Y. He, LMI Approach to Analysis and Control of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Time Delay, 1st ed. Springer-Verlag, New York. 2007.
- [38] S. H. Esfahani, "An Improvement on the problem of output feedback fuzzy H_∞ -tracking control design for nonlinear discrete-time systems with state and input delay", IET Control Theory and Applications, 2016, vol. 10, no. 1, pp. 24-34.
- [39] D. Senthikumar, and C. Mahanta, "Fuzzy guaranteed cost controller for trajectory tracking in nonlinear systems", Elsevier, International Journal of Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2009, vol. 3, pp. 368-379.
- [40] C. Ting, "An output feedback fuzzy approach to guaranteed cost control of vehicle lateral motion", Elsevier, Journal of Mechatronics, 2009, vol.19, pp. 304-312.
- [41] D. Kang, and S. Won, "Guaranteed cost fuzzy tracking control for nonlinear systems via output feedback approach", IEEE International Conference on Control and Automation, 2009, pp. 404-409.
- [42] C.-H. Liu, "Model reference output feedback guaranteed cost fuzzy tracking control design for nonlinear systems", Journal of China University of Science and Technology, 2013, vol. 55, pp. 133-151.
- [43] A.H. Besheer, H.M. Emar, and M.M. Abdel Aziz, "An LMI approach to mixed model following based fuzzy control for nonlinear dynamic systems", IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Taiwan, 2006, pp. 3103-3108.
- [44] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski, and T.M.Guerra, "Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models", Information Science, 2009, vol. 179, pp. 446-457.
- [45] V. Azimi, M.A. Nekoui, and A. Fakharian, "Robust multi-objective H_2/H_∞ tracking control based on the Takagi/Sugeno fuzzy model for a class of nonlinear uncertain drive systems", Journal of systems and control Engineering, 2012, vol. 226, pp. 1107-1118.