

کنترل مقاوم دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ‌شونده نامعین و در معرض اغتشاش بر اساس خاصیت انفعال

مائده ملک ورنوسفادرانی^۱ و حمیدرضا کوفیگر^۲

^۱ دانشکده فنی - مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران، m.malek@eng.ui.ac.ir

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار مهندسی برق - کنترل، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران،

koofigar@eng.ui.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۲/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۰۴)



دانشگاه صنعتی شاهرود

DOR:

20.1001.1.23223146.1399.7.2.4.8

نشریه سازه‌های غیرخطی (مهندسی برق)

دوره ۷ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۳۹۹

صفحات ۱۹ الی ۳۷

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

چکیده

واژه‌های کلیدی

پایداری، کنترل H_{∞} ،

سیستم‌های سوئیچ‌شونده،

خاصیت اتلاف،

انفعال.

در این مقاله، مساله پایداری مقاوم سیستم‌های سوئیچ‌شونده غیرخطی همراه با نامعینی و اغتشاش بررسی شده است. با توجه به اینکه حل مساله کنترل H_{∞} برای سیستم‌های سوئیچ‌شونده با تابع ذخیره مشترک برای همه زیرسیستم‌ها ممکن است وجود نداشته باشد و از طرف دیگر، برای استفاده از توابع ذخیره چندگانه باید نامعادله‌های مختلف همیلتون - ژاکوبین حل شود، در این مقاله مساله کنترل مقاوم مبتنی بر خاصیت انفعال^۱ مدنظر قرار گرفته و در دو حالت بررسی شده است. حالت اول مربوط به زمانی است که حداقل یک زیرسیستم غیرفعال^۲ در کل فضای حالت وجود دارد و حل مساله از روش زمان سکون میانگین انجام می‌شود. در این حالت، با تعریف مفهوم نرخ انفعال سیستم، محدوده مجاز تغییرات زمان سکون میانگین برای وجود جواب بدست می‌آید. در حالت دوم که هیچ یک از زیرسیستم‌های سوئیچ‌شونده غیرفعال نیستند، شرایط حل مساله کنترل H_{∞} سیستم سوئیچ‌شونده با استفاده از فیدبک غیرفعال‌ساز بدست می‌آید. علاوه بر اثبات تئوری الگوریتم‌های طراحی، کارایی قضایای پیشنهادی برای سیستم‌های سوئیچ‌شونده غیرخطی نامعین با ارائه دو مثال شبیه‌سازی و تحلیل عددی بررسی شده است.

^۱ Passivity

^۲ Passive



Sahand University
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1399.7.2.4.8](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1399.7.2.4.8)

Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering

Vol.7, No.2

Autumn and Winter 2020

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

Robust Control of a Class of Uncertain Switched Nonlinear Systems in the Presence of Disturbances: A Passivity Based Approach

Maedeh Malek¹ and Hamid Reza Koofigar²

¹MSc. Student, Department of Electrical Engineering, University of Isfahan, m.malek@eng.ui.ac.ir

²**Corresponding Author**, Associate Professor, Department of Electrical Engineering, University of Isfahan, koofigar@eng.ui.ac.ir

ABSTRACT

Keywords

Stabilization,
 H_∞ control,
Switched systems,
Dissipativity,
Passivity.

In this paper, the problem of robust stabilization of uncertain and perturbed switched nonlinear systems has been investigated. It's well-known that the solution of H_∞ control problem may not exist for switched systems with a common storage function for all subsystems. On the other hand, by adopting multiple storage functions, different Hamilton-Jacobi inequalities need to be solved. Hence, the robust control problem is addressed here based on passivity, in two cases. First, it is assumed that there is at least one passive subsystem in the whole state space, and the problem is solved based on the average dwell time approach. In this case, by defining the concept of system passivity rate, the admissible range of average dwell time is obtained. In the second case, none of subsystems is passive and the H_∞ control problem is solved by using the feedback passification. In addition to theoretical analysis of the design algorithms, the performance of the theorems for uncertain switched nonlinear systems has been investigated by providing two simulation examples and numerical analysis.

۱ - مقدمه

سیستم‌های سوئیچ‌شونده یکی از زیر مجموعه‌های پرکاربرد سیستم‌های هایبرید هستند که شامل دینامیک‌های پیوسته و گسسته‌اند و به طور گسترده در سیستم‌های رباتیک، سیستم‌های انرژی و حمل و نقل مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱] و [۲]. پایداری سیستم‌های سوئیچ‌شونده در تحقیقات گذشته با استفاده از روش‌های مختلفی از جمله تابع لیپانف مشترک^۱ [۳] و [۴]، تابع لیپانف چندگانه^۲ [۵] و [۶] و زمان سکون میانگین^۳ [۷] و [۸] مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل خاصیت اتلاف^۴ نیز یکی دیگر از رویکردهای مهم برای مطالعه پایداری به خصوص برای سیستم‌های متصل است [۹] و [۱۰]. روش تابع لیپانف مشترک، روش مناسبی برای بررسی پایداری و پایدارسازی سیستم‌های سوئیچ‌شونده تحت سیگنال کلیدزنی دلخواه است [۱۱]. البته وجود یک تابع لیپانف مشترک برای کلیه زیرسیستم‌ها یک شرط محافظه‌کارانه محسوب می‌شود. از این رو، توسعه روش‌هایی که در آن هر زیرسیستم تابع لیپانف خاص خود را داشته باشد مورد توجه قرار گرفت. تکنیک تابع لیپانف چندگانه در سال ۱۹۹۱ برای کلیدزنی مقید معرفی شد [۱۲] و بعدها در سال ۱۹۹۸ توسعه بیشتری یافت [۵]. روش زمان سکون میانگین نیز به عنوان روش مؤثر دیگر برای سیستم‌های سوئیچ‌شونده مقید با زیرسیستم‌های پایدار و ناپایدار مطرح شد [۱۳]. اخیراً این روش برای نتایج تحلیل پایداری سیستم‌های سوئیچ‌شونده با زیرسیستم‌های ناپایدار توسعه یافته است [۱۴].

برای سیستم‌های سوئیچ‌شونده که در معرض اغتشاش و نامعینی هستند، ارائه الگوریتم‌های تحلیل و طراحی، اهمیت ویژه دارد. از راهبردهای مؤثر در حضور نامعینی پارامتری^۵ روش‌های کنترل تطبیقی است [۱۵] و [۱۶]. یکی از محدودیت‌های مربوط به این روش‌ها، عملکرد نامناسب در برابر نامعینی‌های بی‌ساختار است. از روش‌های مؤثر دیگر برای تحلیل پایداری نامی و مقاوم، استفاده از خاصیت اتلاف است. این خاصیت با توصیف یک رابطه بین ورودی و خروجی بیان می‌کند که انرژی ذخیره شده در سیستم، بیشتر از انرژی تامین شده از خارج سیستم نیست [۱۰] و [۱۷]. این رابطه توسط تابع ذخیره^۶ و نرخ تامین^۷ مشخص می‌شود که به ترتیب انرژی ذخیره شده داخل سیستم و انرژی ذخیره شده از خارج سیستم را نشان می‌دهد. از طرف دیگر، کنترل H_∞ به دلیل قابلیت در کاهش اثر اغتشاشات خارجی، به عنوان یکی از روش‌های کنترل مقاوم مورد توجه محققین قرار گرفته است. در [۱۸]، کنترل H_∞ مبتنی بر مفهوم انفعال برای سیستم سوئیچ‌شونده غیرخطی با نوع خاصی از نامعینی و با شرط وجود حداقل یک زیرسیستم غیرفعال بررسی شده است. با توجه به اینکه این روش بر پایه زمان سکون میانگین ارائه می‌شود، باید الزاماً حداقل یک زیرسیستم در کل فضای حالت غیرفعال باشد. از دیگر محدودیت‌های تحقیقات پیشین، عدم تعیین محدوده مجاز زمان سکون میانگین برای وجود جواب است که در این مقاله، محدوده مورد نظر بر حسب پارامترهای سیستم مشخص و در هر مسئله به صورت دقیق قابل تعیین است. در شرایطی که هیچ زیرسیستم غیرفعالی وجود ندارد، شرایط حل مسئله کنترل H_∞ با طراحی قانون کلیدزنی وابسته به حالت بدست می‌آید. در [۱۹]، کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال برای یک دسته از سیستم‌های سوئیچ‌شونده غیرخطی با درجه نسبی یک بررسی شده

¹ Common Lyapunov Function (CLF)

² Multiple Lyapunov Function (MLF)

³ Average Dwell Time (ADT)

⁴ Dissipativity

⁵ Parametric Uncertainty

⁶ Storage Function

⁷ Supply Rate

ولی نامعینی در مدل سیستم در نظر گرفته نشده است. بررسی تحقیقات انجام شده قبلی نشان می‌دهد که تاکنون حل مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال برای سیستم‌های سوئیچ‌شونده همراه با نامعینی ارائه نشده است.

با توجه به محدودیت‌های ذکر شده، هدف از این مقاله حل مساله کنترل کننده پایدارساز H_∞ سیستم‌های سوئیچ‌شونده غیرخطی با وجود اغتشاش و نامعینی بر اساس انفعال است. در مقایسه با تحقیقات قبلی، خصوصیات زیر از ویژگی‌های متمایز این مقاله به حساب می‌آیند:

۱- در حالتی که سیستم سوئیچ‌شونده دارای حداقل یک زیرسیستم اتلافی (غیرفعال) در کل فضای حالت باشد، شرط وجود کنترل کننده پایدارساز H_∞ برای دسته‌ی کلی‌تر از نامعینی‌های مدل استخراج می‌شود. همچنین، محدوده مجاز تغییرات زمان سکون میانگین بر حسب مشخصات و پارامترهای سیستم محاسبه می‌گردد.

۲- در حالتی که زیرسیستمی غیرفعال نباشد، با استفاده از فیدبک غیرفعال‌ساز برای سیستم با درجه نسبی یک، شرایط برای حل مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال برای حضور همزمان اغتشاش و نامعینی بدست آورده می‌شود.

در ادامه مقاله، ابتدا در بخش ۲ تعاریف و ریاضیات مورد نیاز بیان شده است. در بخش ۳، قضایای پیشنهادی و اثبات آنها برای طراحی کنترل کننده پایدارساز H_∞ مبتنی بر انفعال مطرح شده است. بخش ۴، شامل دو مثال شبیه‌سازی عددی برای تحلیل عددی و نشان دادن کارایی قضایای پیشنهادی بوده و بخش ۵ شامل نتیجه‌گیری است.

۲- تعاریف و ریاضیات مورد نیاز

معادلات سیستم سوئیچ‌شونده غیرخطی را به فرم رابطه (۱) در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_{\sigma(t)}(x) + g_{\sigma(t)}(x)u_{\sigma(t)} \\ y &= h_{\sigma(t)}(x)\end{aligned}\quad (1)$$

که در آن، $x \in R^n$ حالت سیستم، $u_{\sigma(t)} \in R^m$ ورودی کنترلی و $y \in R^m$ خروجی قابل اندازه‌گیری را نشان می‌دهد. زیرسیستم‌ها است. توابع $f_i(x)$ ، $g_i(x)$ و $h_i(x)$ میدان‌های برداری هموار هستند که شرط $f_i(0) = 0$ و $h_i(0) = 0$ به ازای هر $i = 1, 2, \dots, M$ را برآورده می‌کنند.

تعریف ۱: سیستم سوئیچ‌شونده (۱) تحت قانون کلیدزنی $\sigma(t)$ غیرفعال است اگر تابع ذخیره نیمه‌معین مثبت $V(\sigma(t), x(t))$ وجود داشته باشد طوری که برای هر t ، $V(\sigma(t), 0) = 0$ و

$$V(\sigma(t), x(t)) - V(\sigma(t_0), x(t_0)) \leq \int_{t_0}^t h_{\sigma(\tau)}^T(x(\tau))u_{\sigma(\tau)}(x(\tau))d\tau + \mu(x_0), \forall u_{\sigma}, 0 \leq t_0 \leq t < \infty \quad (2)$$

که $\mu(\cdot)$ تابعی پیوسته با $\mu(0) = 0$ است [۲۰].

لم ۱ (لم KYP^۱): شرط لازم و کافی برای اینکه نامعین زیر سیستم از سیستم (۱) غیرفعال باشد این است که تابع ذخیره مشتق‌پذیر نیمه‌معین مثبت $V(0) = 0, V(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $L_{f_i}V_i(x) \leq 0$ و $L_{g_i}V_i(x) = h_i^T(x)$ باشد. همچنین اگر تابع معین مثبت $Q_i(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $L_{f_i}V_i(x) \leq -Q_i(x)$ و $L_{g_i}V_i(x) = h_i^T(x)$ باشد، آنگاه نامعین زیر سیستم از سیستم (۱) اکیداً غیرفعال نامیده می‌شود [۲۱].

تعریف ۲: سیستم سوئیچ‌شونده غیرخطی نامعین

$$\dot{x} = f_\sigma(x) + \Delta f_\sigma(t, x) \quad (۳)$$

پایدار نمایی مقاوم سراسری با $\lambda \geq 0$ برای سیگنال کلیدزنی σ نامیده می‌شود، اگر برای هر شرط اولیه $x(t_0)$ و همه نامعینی‌های مجاز Δf_σ ، نامساوی $\|x(t)\| \leq \alpha \exp(-\lambda(t - t_0)) \|x(t_0)\|$ و $t \geq t_0, \alpha > 0$ برقرار باشد [۱۸].

تعریف ۳: برای هر $0 \leq T_1 < T_2$ فرض کنید $T_p[T_1, T_2]$ کل مدت زمانی را نشان دهد که زیرسیستم‌های غیرفعال در بازه $[T_1, T_2]$ فعال هستند. آنگاه $T_n[T_1, T_2] = \frac{T_p[T_1, T_2]}{T_2 - T_1}$ نرخ انفعال سیستم سوئیچ‌شونده نامیده می‌شود که مقداری بین صفر تا یک دارد [۱۸]. همچنین، $T_n[T_1, T_2]$ مدت زمان فعال بودن زیرسیستم‌های فعال^۲ در بازه $[T_1, T_2]$ را نشان می‌دهد.

تعریف ۴: سیستم غیرخطی

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (۴)$$

آشکارپذیر نرم زمان کوچک نمایی^۳ با اندازه $\bar{\lambda}$ نامیده می‌شود، اگر $\theta > 0$ و $c > 0$ وجود داشته باشند به طوری که وقتی $\|y(t+s)\| \leq \theta$ برای $t \geq t_0, \tau > 0$ و $0 < s \leq \tau$ است داشته باشیم $\|x(t+\tau)\| \leq ce^{-\bar{\lambda}\tau} \|x(t)\|$ [۲۱].

لم ۲: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Delta f(t, x) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (۵)$$

فرض کنید ثابت‌های مثبت c و $\bar{\lambda}$ وجود دارد به طوری که $\|e^{At}\| \leq c \exp(-\bar{\lambda}t)$ برقرار باشد. بنابراین سیستم اندازه $\bar{\lambda}$ و به ازای نامعینی $\Delta f(t, x)$ ، آشکارپذیر نرم زمان کوچک نمایی با اندازه $c - \bar{\lambda}$ است.

تعریف ۵: سیستم سوئیچ‌شونده غیرخطی (۱) را سیستم سوئیچ‌شونده غیرفعال شده با فیدبک می‌نامیم، اگر قوانین فیدبک حالت $u_i =$

$\alpha_i(x) + \beta_i(x)v_i$ وجود داشته باشد به طوری که زیرسیستم‌های

$$\dot{x} = f_i(x) + g_i(x)\alpha_i(x) + g_i(x)\beta_i(x)v_i$$

^۱ Kalman-Yacubovitch-Popov

^۲ Non-Passive

^۳ Exponential Small-Time Norm Observability

$$y = h_i(x), \quad 1 \leq i \leq M \quad (۶)$$

نامعادله انفعال (۲) از ورودی جدید v_i به خروجی y تحت بعضی از قوانین کلیدزنی را برآورده کنند.

۳- پایدارسازی به روش کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال

سیستم سوئیچ‌شونده غیرخطی نامعین مختل شده به فرم (۷) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_\sigma(x) + \Delta f_\sigma(t,x) + g_\sigma(x)u_\sigma + d_\sigma(t) \\ y &= h_\sigma(x) \end{aligned} \quad (۷)$$

که توابع $f_i(x)$, $g_i(x)$ و $h_i(x)$ میدان‌های برداری هموار هستند که $f_i(0) = 0$ و $h_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, M$. همچنین، $d_i(t)$ اغتشاش ورودی متعلق به $L_2[0, \infty)$ و $\Delta f_i(t,x)$ بیانگر نامعینی i امین زیرسیستم است که فرض زیر را برآورده می‌کند.

فرض ۱: به ازای $i = 1, 2, \dots, M$ ، $\Delta f_i(t,x)$ بیانگر نامعینی i امین زیرسیستم به صورت $\Delta f_i(t,x) = e_i(x)\delta_i(t)$ است که e_i یک ماتریس معلوم از توابع هموار حالت است طوری که $\|e_i(t)\| \leq \|x\|$ برقرار و δ_i تابع نامعلوم با ویژگی $\|\delta_i(t)\| \leq \Gamma_i(t)$ و $\delta_i(0) = 0$ برای Γ_i معلوم می‌باشد.

۳-۱- تعریف مساله کنترل H_∞

برای سیستم غیرخطی سوئیچ‌شونده (۷)، مساله کنترل H_∞ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ و کنترل‌کننده $u_i(x)$ که $u_i(0) = 0$ برای هر زیرسیستم مربوط به سیستم (۷) به گونه‌ای تعیین شود که داشته باشیم:

الف- سیستم حلقه بسته (۷) با $d_i = 0$ پایدار مجانبی مقاوم سراسری باشد.

ب- بهره L_2 از d به y به ازای همه نامعینی‌های مجاز برقرار باشد یعنی:

$$\int_{t_0}^T y_{\sigma(t)}^T(t) y_{\sigma(t)}(t) dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^T d_{\sigma(t)}^T(t) d_{\sigma(t)}(t) dt \quad (۸)$$

که $\gamma > 0$ یک ضریب تضعیف داده شده است.

۳-۲- مساله کنترل H_∞ با وجود حداقل یک زیرسیستم غیرفعال

در این زیربخش، ابتدا کنترل‌کننده‌ای برای زیرسیستم‌های غیرخطی سیستم (۷) با $d_i(t) = 0$ به منظور پایدارسازی سیستم طراحی خواهد شد. با در نظر گرفتن اغتشاش، بهره L_2 از d به y به ازای همه نامعینی‌های مجاز بدست می‌آید. سپس، شرایط کافی حل مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال برای سیستم سوئیچ‌شونده (۷) با استفاده از دیدگاه زمان سکون میانگین تعیین و محدوده مجاز تغییرات این زمان بدست آورده خواهد شد. ابتدا فرضیات زیر را در نظر بگیرید:

فرض ۲: فرض کنید تابع معین مثبت مشتق‌پذیر $V_i(x)$ که $i \in \bar{M}$ و ثابت‌های مثبت $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ و $\mu \geq 1$ وجود دارند به طوری

که برای هر $x \in R^n$ و هر $i, j \in \bar{M}$ داشته باشیم:

$$a_1 \|x\|^2 \leq V_i(x) \leq a_2 \|x\|^2 \quad (9)$$

$$\left\| \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} \right\| \leq a_3 \|x\| \quad (10)$$

$$V_i(x) \leq \mu V_j(x) \quad (11)$$

فرض ۳: برای زیرسیستم فعال نام، یک ثابت $\lambda > 0$ وجود دارد به طوری که

$$L_{f_i} V_i(x) \leq \lambda V_i(x) \quad (12)$$

فرض ۴: برای زیرسیستم غیرفعال نام خاصیت زیر برقرار است:

$$L_{f_i} V_i(x) \leq 0, L_{g_i} V_i(x) = h_i^T(x) \quad (13)$$

قضیه ۱: سیستم سوئیچ‌شونده (۷) با فرضیات ۱ تا ۴ و مقادیر مثبت r و τ_a که به ترتیب زمان سکون میانگین و نرخ انفعال هستند را در نظر بگیرید. همچنین، زیرسیستم‌های غیرفعال با $u_i = 0$ آشکارپذیر نرم زمان کوچک نمایی با ثابت‌های مثبت $\bar{\lambda}$ ، c و θ هستند

$$\text{که } \lambda_1 > 0, c \leq \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \exp \frac{a_3 \zeta}{a_1}}, \bar{\lambda} \geq \frac{\lambda^*}{2} \text{ و}$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda_1}{r} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\ln \mu}{r \tau_a} - \lambda \quad (14)$$

آنگاه:

(الف)- برای $d_i = 0$ ، با اعمال کنترل‌کننده به صورت

$$u_i(x) = \begin{cases} -k_i(V_i(x), \tau_a, r) (L_{g_i} V_i(x))^T & \text{زیرسیستم } i \text{ ام غیرفعال باشد} \\ 0 & \text{زیرسیستم } i \text{ ام فعال باشد} \end{cases} \quad (15)$$

که در آن

$$k_i(V_i(x), \tau_a, r) = \begin{cases} \frac{\lambda^* V_i(x)}{\|L_{g_i} V_i(x)\|^2} & \|L_{g_i} V_i(x)\| > \theta \\ 0 & \|L_{g_i} V_i(x)\| \leq \theta \end{cases} \quad (16)$$

سیستم حلقه بسته تحت هر سیگنال کلیدزنی با زمان سکون میانگین $\tau_a > 0$ و نرخ انفعال $r > 0$ پایدار نمایی مقاوم سراسری است.

(ب)- برای $d_i \neq 0$ ، فرض کنید $\gamma > 0$ ضریب تضعیف داده شده باشد و برای زیرسیستم فعال نام، $L_{g_i} V_i(x) = h_i^T(x)$

باشد. علاوه بر این برای همه‌ی نامعینی‌های مجاز که فرض ۱ را برآورده می‌کنند، زیرسیستم‌های غیرفعال آشکارپذیر نرم زمان

کوچک نمایی با ثابت‌های مثبت $\bar{\lambda}$ ، c و θ فرض شده‌اند. آنگاه کنترل‌کننده‌ها به فرم

$$u_i(x) = \begin{cases} -k_i(V_i(x), \tau_a, r, \gamma) (L_{g_i} V_i(x))^T & \text{زیرسیستم } i \text{ ام غیرفعال باشد} \\ -(L_{g_i} V_i(x))^T & \text{زیرسیستم } i \text{ ام فعال باشد} \end{cases} \quad (17)$$

داده می‌شوند که

$$k_i(V_i(x), \tau_a, r, \gamma) = \begin{cases} \frac{\lambda^* V_i(x) + h_i h_i^T}{\|L_{gi} V_i(x)\|^2} & \|L_{gi} V_i(x)\| > \theta \\ 0 & \|L_{gi} V_i(x)\| \leq \theta \end{cases} \quad (18)$$

و $\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2}$ و $\lambda_2 > 0$ است. بنابراین، سیستم سوئیچ‌شونده دارای بهره L_2 از d به γ برای همه‌ی نامعینی‌های مجاز است.

اثبات: مجموعه $S_i = \{t: \|L_{gi} V_i(x(t))\| \leq \theta\}$ را تعریف می‌کنیم و اثبات را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

(الف) $d_i(t) = 0$ که با مشتق‌گیری از $V_i(x)$ مربوط به سیستم (۷) زمانی که \dot{V}_i زیرسیستم فعال است و مجموعه S_i جوابی نداشته باشد داریم:

$$\dot{V}_i = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} \Delta f_i(x) + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x) u_i \quad (19)$$

با جایگذاری کنترل‌کننده (۱۵) در (۱۹) و با توجه به (۹)، (۱۰) و (۱۳) برای زیرسیستم غیرفعال \dot{V}_i داریم:

$$\dot{V}_i \leq -\left(\lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \Gamma_i(t)\right) V_i(x) \quad (20)$$

به طور مشابه، برای زیرسیستم فعال \dot{V}_i از (۹)، (۱۰) و (۱۲) داریم:

$$\dot{V}_i \leq \left(\lambda + \frac{a_3}{a_1} \Gamma_i(t)\right) V_i(x) \quad (21)$$

با استفاده از نابرابری (۲۰) و (۲۱) داریم:

$$V_{ik}(x(t)) \leq \varphi_{i_k}(t, t_k) V_{ik}(x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

که در آن،

$$\varphi_{i_k}(t, t_k) = \begin{cases} \xi \exp(-\lambda^*(t - t_k)), & \dot{V}_i \text{ زیرسیستم غیرفعال باشد} \\ \xi \exp(\lambda(t - t_k)), & \dot{V}_i \text{ زیرسیستم فعال باشد} \end{cases}$$

و $\xi = \exp\left(\frac{a_3 \zeta}{a_1}\right), \int_{t_k}^t \Gamma_i(\tau) d\tau = \zeta$ در نظر گرفته شده است.

تابع تکه‌ای $V(x(t)) = V_{ik}(x(t)), t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k = 0, 1, 2, \dots$ هنگامی که زمان t ، نابرابری $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t < t_{n+1} < \dots$ با مشخصه $\varphi_{i_k}(t, \tau) \varphi_{i_k}(\tau, s) = \xi \varphi_{i_k}(t, s)$ را برآورده می‌کند و با استفاده از (۱۱) داریم:

$$V(x(t)) \leq \mu^n \xi^{n+1} \exp(-\lambda^* T_{p[t_0, t]} + \lambda T_{n[t_0, t]}) V(x(t_0)) \leq \xi \exp\left(\left(N_0 + \frac{t-t_0}{\tau_a}\right) \ln(\mu \xi) - \lambda^* T_{p[t_0, t]} + \lambda T_{n[t_0, t]}\right) V(x(t_0)) \quad (23)$$

بنابراین با استفاده از تعریف زمان سکون میانگین، نرخ انفعال و (۱۴) داریم:

$$\left(N_0 + \frac{t-t_0}{\tau_a}\right) \ln(\mu\xi) - \lambda^* T_{p[t_0,t]} + \lambda T_{n[t_0,t]} \leq \left(N_0 + \frac{t-t_0}{\tau_a}\right) \ln(\mu\xi) - \lambda^* r(t-t_0) + \lambda(1-r)(t-t_0) \leq N_0 \ln(\mu\xi) - \left(\lambda^* r - \lambda(1-r) - \frac{\ln(\mu)}{\tau_a}\right)(t-t_0) \leq N_0 \ln(\mu\xi) - \lambda_1(t-t_0) \quad (24)$$

با جایگذاری (۲۴) در (۲۳) داریم:

$$V(x(t)) \leq \xi^{N_0+1} \mu^{N_0} \exp(-\lambda_1(t-t_0)) V(x(t_0))$$

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \mu^{N_0} \xi^{N_0+1}} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2}(t-t_0)\right) \|x(t_0)\| \quad \text{با استفاده از (۹) داریم:}$$

حال برای حالتی که مجموعه S_i جواب داشته باشد و λ نامعین زیرسیستم غیرفعال باشد، بحث می‌کنیم. از آنجایی که $h_i(x)$ ها توابع پیوسته هستند، $Lg_i V_i(x)$ در هنگام فعال بودن زیرسیستم متناظر پیوسته است. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که مجموعه

$$\{t: \|Lg_i V_i(x(t))\| \leq \theta\} = [t_{i_1}, \hat{t}_{i_1}] \cup [t_{i_2}, \hat{t}_{i_2}] \cup \dots \subset [t_0, t]$$

است. با استفاده از آشکارپذیر نرم زمان کوچک نمایی زیرسیستم غیرفعال برای $\theta > 0$ داریم:

$$\|x(\hat{t}_{i_k})\| \leq c \exp(-\bar{\lambda}(\hat{t}_{i_k} - t_{i_k})) \|x(t_{i_k})\| \leq \sqrt{\frac{a_1 \xi}{a_2}} \exp\left(-\frac{\lambda^*}{2}(\hat{t}_{i_k} - t_{i_k})\right) \|x(t_{i_k})\|$$

$$V_i(x(\hat{t}_{i_k})) \leq \xi \exp(-\lambda^*(\hat{t}_{i_k} - t_{i_k})) V_i(x(t_{i_k})) \quad \text{از (۹) نتیجه می‌گیریم:}$$

با استفاده از روش مشابه، برای اثبات حالتی که مجموعه S_i جوابی نداشته باشد داریم:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \mu^{N_0} \xi^{N_0+1}} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2}(t-t_0)\right) \|x(t_0)\|$$

بنابراین، سیستم حلقه بسته برای $d_i(t) = 0$ پایدار نمایی مقاوم است.

(ب): $d_i(t) \neq 0$ که با مشتق‌گیری از $V_i(x)$ ، زمانی که λ نامعین زیرسیستم در (۷) فعال است داریم:

$$\dot{V}_i = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} \Delta f_i(x) + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x) u_i + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} d_i(t) \quad (25)$$

برای زیرسیستم غیرفعال نام در حالتی که S_i جوابی نداشته باشد، با جایگذاری کنترل‌کننده (۱۷) در (۲۵) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\left(\lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \Gamma_i(t)\right) V_i(x) + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} d_i(t) - h_i^T(x) h_i(x) \leq -\left(\lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \Gamma_i(t)\right) V_i(x) + \\ &a_3 \|x\| \|d_i(t)\| - h_i^T(x) h_i(x) \leq -\left(\lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \Gamma_i(t)\right) V_i(x) + \frac{a_3^2}{4\gamma^2} \|x\|^2 + \gamma^2 \|d_i(t)\| - h_i^T(x) h_i(x) \leq \\ &-\left(\lambda^* - \frac{a_3}{a_1} \Gamma_i(t) - \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2}\right) V_i(x) + \gamma^2 d_i^T(t) d_i(t) - h_i^T(x) h_i(x) \quad (26) \end{aligned}$$

به طور مشابه برای زیرسیستم فعال نام داریم:

$$\dot{V}_i \leq \left(\lambda + \frac{a_3}{a_1} \Gamma_i(t) + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2}\right) V_i(x) + \gamma^2 d_i^T(t) d_i(t) - h_i^T(x) h_i(x) \quad (27)$$

برای سادگی، تعریف می‌کنیم $\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2}$ ، $\tilde{\lambda}^* = \lambda^* - \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2}$ و $M_i(t) = \gamma^2 d_i^T(t)d_i(t) - h_i^T(x)h_i(x)$

با استفاده از نامعادلات (۲۶) و (۲۷) داریم:

$$V_{ik}(x(t)) \leq \varphi(t, t_k)V_{ik}(x(t_k)) + \int_{t_k}^t \varphi_{ik}(t, \tau)M_{ik}(\tau) d\tau, t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

که در آن،

$$\varphi_{ik}(t, \tau) = \begin{cases} \xi \exp(-\tilde{\lambda}^*(t - \tau)), & i_k \text{ امین زیرسیستم غیرفعال باشد} \\ \xi \exp(\tilde{\lambda}(t - \tau)), & i_k \text{ امین زیرسیستم فعال باشد} \end{cases}$$

تابع تکه‌ای $V(x(t)) = V_{ik}(x(t))$ ، $t \in [t_k, t_{k+1})$ ، $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ انتخاب می‌کنیم. هنگامی که زمان t نابرابری $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t < t_{n+1} < \dots$ را برآورده می‌کند، با استفاده از (۲۸) داریم:

$$V(x(t)) \leq \xi(\mu\xi)^n \exp(-\tilde{\lambda}^*T_{p[t_0, t]} + \tilde{\lambda}T_{n[t_0, t]})V(x(t_0)) + \xi \sum_{l=1}^n \int_{t_{l-1}}^{t_l} (\mu\xi)^{n+1-l} \exp(-\tilde{\lambda}^*T_{p[\tau, t]} + \tilde{\lambda}T_{n[\tau, t]})M(\tau)d\tau + \int_{t_n}^t \varphi(t, \tau)M(\tau)d\tau \quad (29)$$

هنگامی که زمان τ ، ناتساوی $t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} \leq \tau < t_l < \dots < t_n < t < t_{n+1} < \dots$ را برآورده می‌کند، واضح است که $N_\sigma(\tau, t) = N_\sigma(t_{l-1}, t) = n + 1 - l$ پس داریم:

$$0 \leq V(x(t)) \leq \mu^n \xi^{n+1} \exp(-\tilde{\lambda}^*T_{p[t_0, t]} + \tilde{\lambda}T_{n[t_0, t]})V(x(t_0)) + \xi \sum_{l=1}^n \int_{t_{l-1}}^{t_l} \exp(-\tilde{\lambda}^*T_{p[\tau, t]} + \tilde{\lambda}T_{n[\tau, t]} + N_\sigma(\tau, t) \ln(\mu\xi))M(\tau)d\tau + \int_{t_n}^t \varphi(t, \tau)M(\tau)d\tau \quad (30)$$

با استفاده از (۳۰) داریم:

$$0 \leq \exp(-\tilde{\lambda}^*T_{p[t_0, t]} + \tilde{\lambda}T_{n[t_0, t]} + N_\sigma(t_0, t) \ln(\mu\xi))V(x(t_0)) + \int_{t_0}^t \exp(-\tilde{\lambda}^*T_{p[\tau, t]} + \tilde{\lambda}T_{n[\tau, t]} + N_\sigma(\tau, t) \ln(\mu\xi))M(\tau)d\tau \quad (31)$$

حال با جایگذاری λ^* و λ_1 در (۳۱) و ضرب طرفین در $\exp(-N_\sigma(t_0, t) \ln(\mu\xi))$ داریم:

$$\int_{t_0}^t \exp\left(\left(-\lambda_2 - \frac{\ln(\mu)}{\tau_a}\right)(t - \tau) - \frac{\ln(\mu\xi)}{\tau_a}(\tau - t_0)\right)y^T(\tau)y(\tau)d\tau \leq \gamma^2 \int_{t_0}^t \exp\left(-\lambda_2 - \frac{\ln(\mu)}{\tau_a}\right)(t - \tau) d^T(\tau)d(\tau)d\tau + \exp\left(-\lambda_2 - \frac{\ln(\mu)}{\tau_a}\right)(t - t_0)V(t_0) \quad (32)$$

با قرار دادن $\xi = 1$ و $\mu = 1$ در (۳۲) داریم:

$$\int_{t_0}^T y^T(\tau)y(\tau)d\tau \leq \gamma^2 \int_{t_0}^T d^T(\tau)d(\tau)d\tau + V(t_0)$$

حال برای $\mu > 1$ بدست می‌آید:

$$\int_{t_0}^T \exp\left(-\frac{\ln(\mu\xi)}{\tau_a}(\tau - t_0)\right)y^T(\tau)y(\tau)d\tau \leq \gamma^2 \int_{t_0}^T d^T(\tau)d(\tau)d\tau + V(t_0)$$

بنابراین سیستم سوئیچ‌شونده دارای بهره L_2 از اغتشاش به خروجی است و قضیه اثبات می‌شود.

لم ۳: در قضیه ۱ قسمت (ب)، محدوده مجاز برای انتخاب r و τ_a عبارتست از:

$$r > \frac{\tau_a(\lambda_1 + \lambda) + \ln \mu}{\tau_a \left(2(\bar{\lambda} - c) + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2} + \lambda \right)} \quad (33)$$

$$\tau_a > \frac{\ln \mu}{r \left(2(\bar{\lambda} - c) + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2} + \frac{\lambda_1}{r} + \frac{\lambda}{r} + \lambda \right)} \quad (34)$$

اثبات: با توجه به اینکه زیرسیستم‌های غیرفعال آشکارپذیر نرم زمان کوچک نمایی با ثابت‌های مثبت $\bar{\lambda}$ ، c و θ و k فرض شده‌اند، رابطه

$$k = \bar{\lambda} - c - \frac{1}{2} \left(\lambda^* - \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2} \right) > 0 \quad (35)$$

برقرار می‌باشد. بنابراین از (۳۵) داریم:

$$2(\bar{\lambda} - c) + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2} > \lambda^* \xrightarrow{(14)} 2(\bar{\lambda} - c) + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2} + \lambda > \frac{1}{r} \left(\lambda_1 + \lambda + \frac{\ln \mu}{\tau_a} \right) \quad (36)$$

که با توجه به (۳۶) روابط (۳۳) و (۳۴) استخراج می‌شوند.

تذکر ۱: در هیچ یک از تحقیقات قبلی، کران مشخصی برای زمان سکون میانگین $\tau_a > 0$ مشخص نشده است. در این مقاله، با روابط (۳۳) و (۳۴)، کران پایین دو مقدار τ_a و r برحسب انتخاب دیگری بدست آورده شده است. این محدوده‌ها علاوه بر استفاده در طراحی کنترل‌کننده، زمینه حل مسائل بهینه‌سازی جهت برآورده شدن اهداف عملکردی مطلوب (علاوه بر پایدارسازی) و یافتن مقادیر بهینه τ_a و r را فراهم می‌کنند.

۳-۳- حل مساله کنترل H_∞ بدون وجود زیرسیستم غیرفعال

اگر هیچ زیرسیستمی غیرفعال نباشد، نمی‌توان از قضیه ۱ برای حل مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال استفاده نمود. در این حالت کنترل‌کننده‌ها را برای زیرسیستم‌ها به نحوی طراحی می‌کنیم که هر زیرسیستم، مشخصه انفعال در ناحیه مربوطه را داشته باشد و شرایط حل مساله کنترل H_∞ حاصل شود.

تذکر ۲: برای پایدارسازی به روش کنترل H_∞ برای حالتی که زیرسیستم غیرفعالی وجود ندارد، لازم است از فیدبک غیرفعال‌ساز استفاده کرد که برای طراحی آن، ابتدا لازم است یک تبدیل مختصات مشترک پیدا کنیم که براساس آن تمام زیرسیستم‌ها بتوانند با فرم نرمال نمایش داده شوند. برای این منظور فرضیات زیر را در نظر بگیرید [۲۰]:

فرض ۵: ماتریس $Lg_i h(x)$ برای همه $x \in R^n$ ناویژه^۱ باشد.

فرض ۶: یک تبدیل مختصات $z = \eta(x)$ ، $z \in R^{n-m}$ وجود دارد به طوری که $Lg_i \eta(x) = 0$ است که $g_i = [g_i^1, g_i^2, \dots, g_i^m]$ و $1 \leq j \leq m$ و $1 \leq i \leq M$ است.

^۱ Non-Singular

حال سیستم سوئیچ‌شونده غیرخطی (۷) با خروجی مشترک $y = h(x)$ را به صورت

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{\sigma}(x) + \Delta f_{\sigma}(t,x) + g_{\sigma}(x)u_{\sigma} + d_{\sigma}(t) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (37)$$

در نظر بگیرید. تحت فرض ۵ و فرض ۶ با تبدیل مختصات $y = h(x)$ و $z = \eta(x)$ ، هر زیرسیستم مربوط به سیستم (۳۷) به فرم نرمال زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q_i^0(z,y) + q_i^1(z,y)\delta_i(t) = q_i^0(z,0) + p_i^0(z,y)y + q_i^1(z,y)\delta_i(t) \\ \dot{y} &= b_i^0(z,y) + a_i(z,y)u_i + b_i^1(z,y)\delta_i(t) + d_i(t) \end{aligned} \quad (38)$$

$$1 \leq i \leq M$$

که $\dot{z} = q_i^0(z,0)$ دینامیک‌های صفر آمین زیرسیستم هستند. بنابراین معادله (۳۷) به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q_{\sigma}^0(z,y) + q_{\sigma}^1(z,y)\delta_{\sigma}(t) \\ \dot{y} &= b_{\sigma}^0(z,y) + a_{\sigma}(z,y)u_{\sigma} + b_{\sigma}^1(z,y)\delta_{\sigma}(t) + d_{\sigma}(t) \end{aligned} \quad (39)$$

$$1 \leq i \leq M$$

قضیه ۲: سیستم (۳۹) را در نظر بگیرید. فرض کنید توابع هموار معین مثبت $w_i(z)$ با $w_i(0) = 0$ و همچنین توابع معین مثبت $Q_i(z)$ ، توابع $\lambda_{ij}(z) \leq 0$ و توابع هموار $\mu_{ij}(z)$ برای همه $i, j \in \bar{M}$ که $\mu_{ij}(0) = 0$ و $\mu_{ii}(z) = 0$ وجود داشته باشند به طوری که داشته باشیم:

$$L_{q_i^0(z,0)}w_i(z) + Q_i(z) + \left\| L_{q_i^1(z,y)}w_i(z) \right\| \Gamma_i(t) + \sum_{j=1}^M \lambda_{ij}(z) (w_i(z) - w_j(z) + \mu_{ij}(z)) \leq 0 \quad (40)$$

$$L_{q_i^0(z,0)}\mu_{ij}(z) + \left\| \left(L_{q_i^1(z,y)}\mu_{ij}(z) \right)^T \right\| \Gamma_i(t) \leq 0 \quad i, j \in \bar{M} \quad (41)$$

$$\mu_{ij}(z) + \mu_{jk}(z) \leq \min\{0, \mu_{ik}(z)\} \quad \forall i, j, k \quad (42)$$

کنترل‌کننده‌ها به فرم (۴۳) طراحی می‌شوند:

$$u_i = a_i^{-1}(z,y) \left(- \left(L_{p_i^0(z,y)}w_i(z) \right)^T - b_i^0(z,y) - b_i^1(z,y)\delta_i(t) + v_i \right) \quad (43)$$

و مساله کنترل H_{∞} سیستم (۳۷) تحت بعضی قانون کلیدزنی قابل حل است.

اثبات: اثبات در دو مرحله بیان می‌شود. ابتدا با طراحی قانون کلیدزنی و کنترل‌کننده به فرم (۴۳) می‌توانیم هر زیرسیستم (۳۸) را با $d_i(t) = 0$ معادل سیستم اکیداً غیرفعال مقاوم شده با فیدبک از ورودی جدید v_i کنیم.

تحت فرض ۵ و فرض ۶، آمین زیرسیستم با فرم نرمال (۳۸) وقتی $d_i(t) = 0$ است، در نظر گرفته شده است. تابع ذخیره به فرم $V_i(z,y) = w_i(z) + \frac{1}{2}y^T y$ انتخاب کرده که با مشتق‌گیری از آن داریم:

$$\dot{V}_i(z,y) = L_{q_i^0(z,0)}w_i(z) + L_{p_i^0(z,y)}w_i(z)y + L_{q_i^1(z,y)}w_i(z)\delta_i(t) + y(b_i^0(z,y) + a_i(z,y)u_i + b_i^1(z,y)\delta_i(t))$$

با قرار دادن کنترل‌کننده (۴۳) و براساس فرض ۱ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(z,y) &\leq L_{q_i^0(z,0)} w_i(z) + \left\| L_{q_i^1(z,y)} w_i(z) \right\| \Gamma_i(t) + v_i^T y \\ &\leq -Q_i(z) - \sum_{j=1}^M \lambda_{ij}(z) (w_i(z) - w_j(z) + \mu_{ij}(z)) + v_i^T y \end{aligned}$$

واضح است که $\dot{V}_i(z,y) \leq -Q_i(z) + v_i^T y$ است. بنابراین زمانی که $d_i(t) = 0$ است، هر زیرسیستم دارای مشخصه اکیداً غیرفعال مقاوم در ناحیه مربوطه است.

حال زمانی که $d_i(t) \neq 0$ ، با جایگذاری کنترل‌کننده (۴۳) در (۳۸) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q_i^0(z,y) + q_i^1(z,y) \delta_i(t) \\ \dot{y} &= - \left(L_{p_i^0(z,y)} w_i(z) \right)^T + v_i + d_i(t) \end{aligned} \quad (44)$$

$$1 \leq i \leq M$$

حال مشابه اثبات قضیه ۱ در [۱۹]، تحت بعضی قانون کلیدزنی و کنترل‌کننده‌های $-Q_i(y) = -\varphi_i(y) = -\rho y$ که $i \in \bar{M}$ $v_i(x) = -\varphi_i(y) = -\rho y$ و $\frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}} \leq \rho$ و $\gamma \varphi_i(y) \geq 0$ مساله کنترل H_∞ سیستم (۴۴) قابل حل است. بنابراین مساله کنترل H_∞ سیستم (۳۷) تحت بعضی قانون کلیدزنی و کنترل فیدبک وابسته به حالت (۴۳) قابل حل است.

تذکر ۳: در [۱۹]، مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال برای یک دسته خاص از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ‌شونده بدون حضور نامعینی مطرح شده است. با رفع این محدودیت، شرایط حل مساله کنترل برای دسته وسیعی از سیستم‌های سوئیچ‌شونده در حضور نامعینی در این مقاله بدست آمده است.

۴- شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

در این بخش ابتدا، مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال برای یک نمونه از سیستم‌های سوئیچ‌شونده غیرخطی (۷) که دارای حداقل یک زیرسیستم غیرفعال در کل فضای حالت است حل خواهد شد. برای این منظور ابتدا ناحیه مجاز انتخاب r و τ_a را ترسیم کرده و با استفاده از نمودار رسم شده و رابطه (۳۳)، مقدار r و τ_a انتخاب می‌شود. سپس با استفاده از قضیه ۱، مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال حل خواهد شد. در قسمت بعد برای حالتی که هیچ زیرسیستم غیرفعال وجود ندارد، شرایط قابل حل بودن مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال برای سیستم (۳۷) بر اساس قضیه ۲ با کنترل‌کننده فیدبک غیرفعال‌ساز و طراحی قانون کلیدزنی وابسته به حالت بدست خواهد آمد.

مثال ۱: سیستم غیرخطی سوئیچ‌شونده (۷) با دو زیرسیستم به معادلات زیر را در نظر بگیرید [۱۸]:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{pmatrix} 18x_2 \\ -\frac{100}{3}x_1 - 70x_2 \end{pmatrix}, \Delta f_1(t,x) = x \cos t, g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h_1 = 18x_2 \\ f_2(x) &= \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ -x_1^3 + 2x_2 \end{pmatrix}, \Delta f_2(t,x) = x \sin t, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^3 \end{pmatrix}, h_2 = 6x_2^4 \end{aligned} \quad (45)$$

توابع ذخیره به فرم $V_1(x) = \frac{50}{3}x_1^2 + 9x_2^2$ و $V_2(x) = 3(x_1^2 + x_2^2)$ انتخاب شده‌اند. با استفاده از لم ۱، انفعال زیرسیستم‌ها را بررسی می‌کنیم که می‌بینیم زیرسیستم ۱ در کل فضای حالت غیرفعال می‌باشد و زیرسیستم ۲ غیرفعال نمی‌باشد و $L_{f_2}V_2(x) \leq 4V_2(x)$ است. با محاسبه معادلات (۹) تا (۱۲) داریم:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = \frac{50}{3}, \quad a_3 = \frac{100}{3}, \quad \mu = \frac{50}{9}, \quad \lambda = 4$$

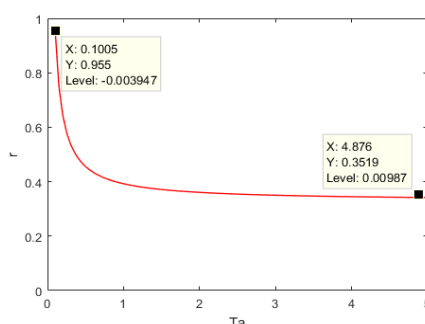
بر اساس لم ۲ میتوان نشان داد که $\|e^{At}\| \leq 0.32 \exp(-10t)$ برای $A = \begin{bmatrix} 0 & 18 \\ -\frac{100}{3} & -70 \end{bmatrix}$ می‌باشد. پس زیرسیستم ۱ آشکارپذیر نرم زمان کوچک نمایی با اندازه $\bar{\lambda} - c = 9.68$ برای $\theta = 0.5$ است.

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2} = 4.9037 \quad \text{با انتخاب } \lambda_2 = 1.2 \text{ و } \gamma = 5 \text{ داریم:}$$

مقادیر بدست آمده را در (۳۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$r > \frac{\tau_a(\lambda_1 + \lambda) + \ln \mu}{\tau_a \left(2(\bar{\lambda} - c) + \frac{a_3^2}{4a_1\gamma^2} + \lambda \right)} = \frac{8.9037\tau_a + 1.715}{27.063\tau_a} \quad (۴۶)$$

حال نمودار r برحسب τ_a را بر اساس (۴۶) در بازه $0 < r < 1$ و $\tau_a > 0$ رسم می‌کنیم.



شکل ۱. توزیع ناحیه مجاز انتخاب مقدار r و τ_a برای مثال ۱

با توجه به نمودار بالا مقدار $\tau_a \geq 0.1$ و $r \geq 0.36$ است. با انتخاب مقدار حداقل τ_a یعنی $\tau_a = 0.1$ از (۴۶)، $r > 0.963$ است. حال با انتخاب $r = 0.97$ و بر اساس (۱۴) و (۳۵) مقدار λ^* و k

$$\lambda^* = \frac{4.9037}{0.97} + \frac{4}{0.97} + \frac{1.715}{0.97 \times 0.1} - 4 = 22.8573, \quad k = 9.68 - 0.5 \left(22.8573 - \frac{(100/3)^2}{4 \times 3 \times 25} \right) = 0.1032$$

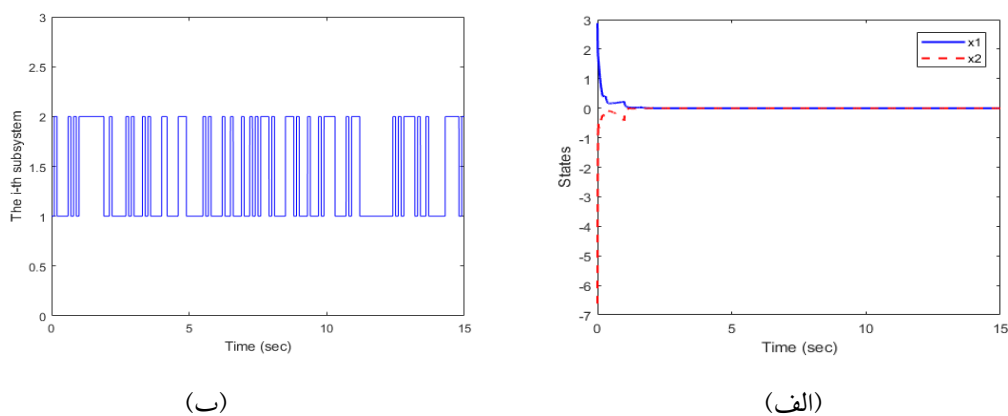
است. اگر $\tau_a = 0.1$ انتخاب شود و $r > 0.96$ انتخاب نشود، آنگاه k منفی شده و نمیتوان مساله را حل کرد. پس حتما باید مقادیر مجاز انتخاب شوند.

مطابق (۱۷) و با توجه به انفعال زیر سیستم ۱، کنترل‌کننده مورد نظر به فرم زیر طراحی می‌شود:

$$u_1(x) = \begin{cases} -\frac{(21.1642x_1^2 + 29.4286x_2^2)x_2}{x_2^2} & x_2^2 > 0.5 \\ 0 & x_2^2 \leq 0.5 \end{cases}$$

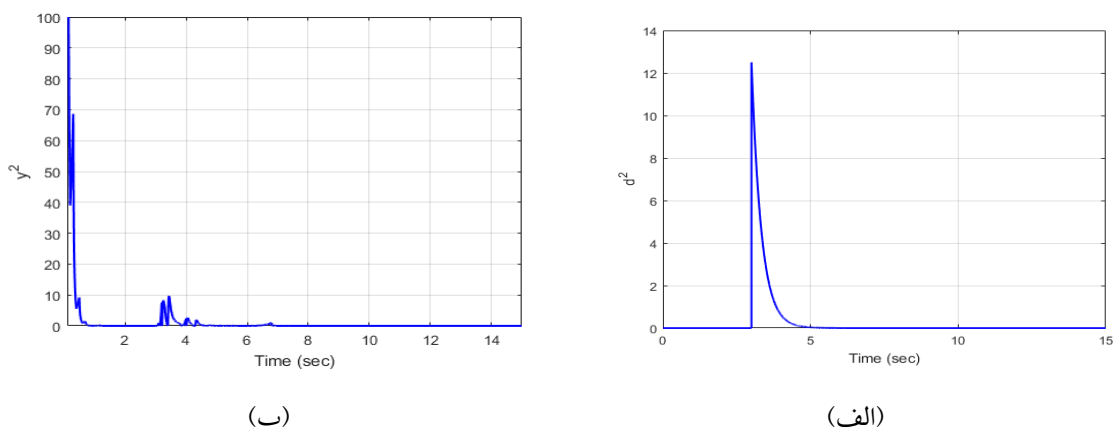
$$u_2(x) = -\left(L_{g_2}V_2(x)\right)^T = -6x_2^4 \quad \text{و برای زیر سیستم فعال ۲ داریم:}$$

نتایج شبیه‌سازی در شکل (۲) برای شرایط اولیه $x(0) = (3, -7)^T$ ، نشان داده شده است. شکل (۲-الف)، پاسخ حالت برای زمانی که $d_i(t) = 0$ است را نشان می‌دهد که بیانگر پایدار نمایی مقاوم سیستم حلقه بسته است. بنابراین، قسمت (الف) حل مساله کنترل H_∞ برقرار است. شکل (۲-ب) سیگنال سوئیچینگ مربوطه را نشان می‌دهد.



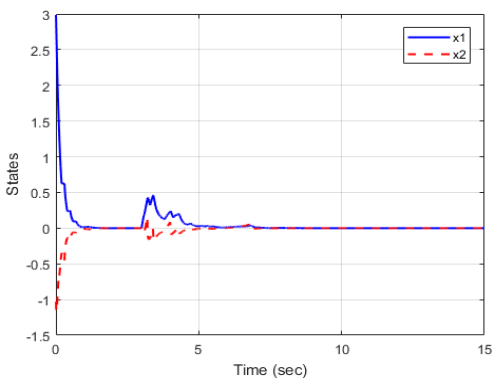
شکل ۲. پاسخ زمانی در مثال ۱ بدون حضور اغتشاش، (الف) حالت‌های سیستم حلقه بسته، (ب) سیگنال سوئیچ

در مرحله بعد، برای نشان دادن عملکرد H_∞ شبیه‌سازی انجام خواهیم داد. برای این منظور، $d_i(t) = 2.5e^{-1.5(t-3)}$ انتخاب شده است. پاسخ $y^T y$ و $d^T d$ در شکل (۳) به ترتیب در (الف) و (ب) نشان داده شده است.

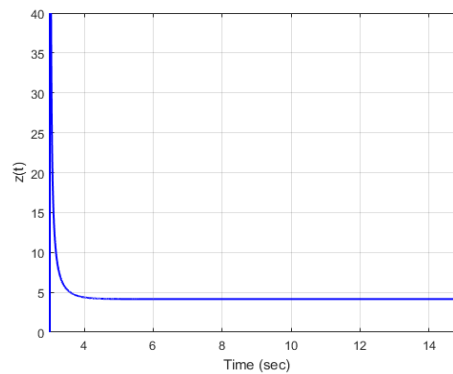


شکل ۳. تاثیر حضور اغتشاش در مثال ۱، (الف) پاسخ $d^T d$ ، (ب) پاسخ $y^T y$

برای مشاهده بهره L_2 ، تابع $z(t) = \frac{\int_0^t \exp\left(-\frac{\ln(\mu\xi)(\tau)}{\tau_a}\right) y^T(\tau) y(\tau) d\tau}{\int_0^t d^T(\tau) d(\tau) d\tau}$ را تعریف می‌کنیم که میزان تضعیف میرایی از $d(t)$ به $y(t)$ را توصیف می‌کند. شکل (۴-الف) پاسخ تابع $z(t)$ را نشان می‌دهد که بهره L_2 کمتر از ۵ می‌باشد. بنابراین قسمت (ب) مساله کنترل H_∞ نیز برقرار است. شکل (۴-ب)، پاسخ حالت سیستم حلقه بسته با حضور اغتشاش و نامعینی می‌باشد که نشان دهنده پایدار نمایی مقاوم است.



(ب)



(الف)

شکل ۴. پاسخ زمانی مثال ۱ در حضور اغتشاش، (الف) پاسخ تابع $z(t)$ ، (ب) پاسخ حالت سیستم حلقه بسته با وجود اغتشاش و نامعینی

بنابراین، مساله کنترل H_∞ برای سیستم سوئیچینگ (۷) با معادلات (۴۵) حل شد.

مثال ۲: سیستم غیرخطی سوئیچ‌شونده (۳۷) با دو زیرسیستم به معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} -4(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_2)x_2^2 \\ 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \Delta f_1(x) = x(\cos t)^2, g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} -1.5(x_1 + x_2) + x_1x_2^2 + 0.5(x_1 + x_2)^3 \\ -x_2^2(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \Delta f_2(x) = 0.5x \sin t, g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$h(x) = x_2$$

ابتدا انفعال زیرسیستم‌ها را بررسی می‌کنیم که زیرسیستم غیرفعالی در کل فضای حالت وجود ندارد. فرم نرمال سیستم را بدست می‌آوریم که برای این منظور، از خروجی مشتق می‌گیریم تا ورودی ظاهر شود. در اولین مشتق، ورودی ظاهر می‌شود پس درجه نسبی $r = 1$ است. تبدیل مختصات به صورت $z = x_1 + x_2$ و $y = x_2$ انتخاب شده که زیرسیستم‌ها به فرم

$$\text{subsys1: } \begin{cases} \dot{z} = -4z^3 + zy^2 + 2z + z(\cos t)^2 \\ \dot{y} = 2z + y(\cos t)^2 - u_1 - d_1(t) \end{cases}, \text{subsys2: } \begin{cases} \dot{z} = -1.5z - y^3 + 0.5z^3 + 0.5z \sin t \\ \dot{y} = -zy^2 + 0.5y \sin t + u_2 + d_2(t) \end{cases} \quad (48)$$

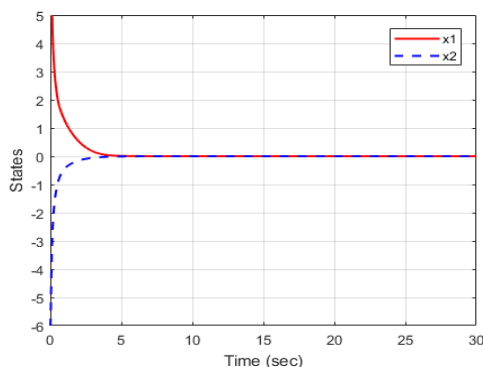
تبدیل می‌شوند. حال با استفاده از قضیه ۲، ابتدا $d_i(t) = 0$ در نظر گرفته شده و با طراحی قانون کلیدزنی و کنترل کننده به فرم (۴۳)، می‌توانیم هر زیرسیستم (۴۸) را معادل سیستم اکیداً غیرفعال مقاوم شده با فیدبک از ورودی جدید v_i کنیم. برای این منظور، $V_2(z,y) = w_2(z) + w_1(z) + \frac{1}{2}y^2$ و $V_1(z,y) = w_1(z) + \frac{1}{2}y^2$ انتخاب می‌شوند و توابع ذخیره $w_2(z) = \frac{1}{4}z^4$ و $w_1(z) = \frac{1}{2}z^2$ هستند.

$$\dot{V}_1(z,y) = \dot{w}_1(z) + y\dot{y} \leq 3(z^2 - z^4) - z^4 + z^2y^2 + 2zy + y^2(\cos t)^2 - u_1y$$

$$\dot{V}_2(z,y) = \dot{w}_2(z) + y\dot{y} \leq 0.5z^2(z^4 - z^2) - 0.5z^4 - z^3y^3 - zy^3 + 0.5y^2 \sin t + u_2y \quad (49)$$

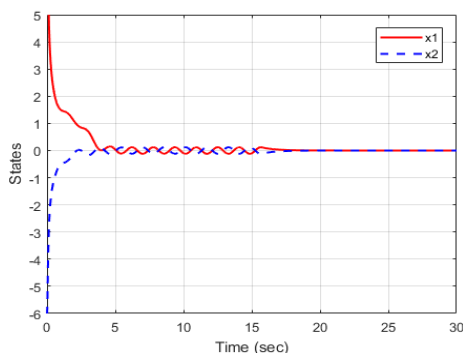
مطابق (۴۳)، کنترل کننده‌ها به فرم $u_2 = zy^2 - 0.5y \sin t + z^3y^2 + v_2$ و $u_1 = z^2y + 2z + y(\cos t)^2 - v_1$ طراحی می‌شوند. بنابراین با جایگذاری کنترلر طراحی شده در رابطه (۴۹)، قانون کلیدزنی به فرم $\sigma = \begin{cases} 1 & z^2 \leq z^4 \\ 2 & z^2 \geq z^4 \end{cases}$ به دست می‌آید.

پس هر زیرسیستم (۴۸) معادل سیستم اکیداً غیرفعال مقاوم‌شده از ورودی جدید v_i به خروجی y در ناحیه مربوطه است. شرایط اولیه $x(0) = (5, -6)^T$ در نظر گرفته شده و با توجه به قضیه ۲، کنترل‌کننده‌های جدید با $\gamma = 2$ به فرم $v_1 = -y$ و $v_2 = -y$ هستند. نتایج شبیه‌سازی در شکل (۵) آمده‌اند که پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را نشان می‌دهد. پس قسمت (الف) مساله کنترل H_∞ برقرار است.

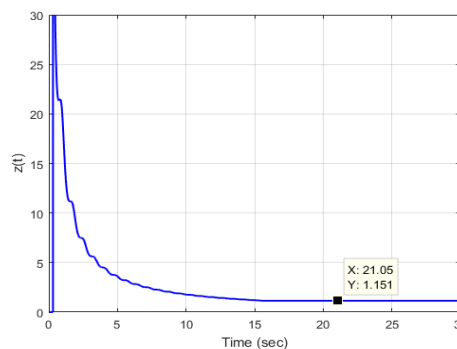


شکل ۵. پاسخ حالت سیستم سوئیچینگ حلقه بسته بدون حضور اغتشاش در مثال ۲

در مرحله بعد برای نشان دادن عملکرد H_∞ اغتشاش را به فرم $d_i(t) = 0.5 \sin(4t)$ در بازه $0 < t < 16$ انتخاب می‌کنیم. همچنین برای مشاهده بهره L_2 ، تابع $z(t) = \frac{\int_0^t y^T(\tau)y(\tau)d\tau}{\int_0^t d^T(\tau)d(\tau)d\tau}$ را تعریف می‌کنیم که میزان تضعیف میرایی از $d(t)$ به $y(t)$ را توصیف می‌کند. شکل (۶-الف)، پاسخ تابع $z(t)$ را نشان می‌دهد که بهره L_2 کمتر از $\gamma = 2$ می‌باشد. بنابراین، قسمت (ب) مساله کنترل H_∞ نیز برقرار است. در شکل (۶-ب)، پاسخ حالت سیستم حلقه بسته با حضور اغتشاش و نامعینی رسم شده است که نشان دهنده پایدار مجانبی مقاوم است. بنابراین مساله کنترل H_∞ برای سیستم سوئیچ‌شونده (۳۷) با معادلات (۴۷) حل شد.



(ب)



(الف)

شکل ۶. پاسخ زمانی مثال ۲ در حضور اغتشاش، (الف) پاسخ تابع $z(t)$ ، (ب) پاسخ حالت سیستم حلقه بسته با وجود اغتشاش و نامعینی

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، به حل مساله کنترل H_∞ مبتنی بر انفعال برای پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچ‌شونده غیرخطی همراه با نامعینی و اغتشاش در دو حالت پرداخته شد. حالت اول مربوط به زمانی است که حداقل یک زیرسیستم غیرفعال در کل فضای حالت

وجود دارد و از روش زمان سکون میانگین، شرایط حل مساله توسط قضیه ۱ بدست آمده است. از جمله مزیت‌های روش پیشنهادی میتوان به استخراج کران پایین دو مقدار T_a و Γ برحسب انتخاب دیگری توسط روابط (۳۳) و (۳۴) اشاره کرد که این محدوده‌ها زمینه حل مسائل بهینه‌سازی جهت برآورده شدن اهداف عملکردی مطلوب را فراهم می‌کنند. حالت دوم مربوط به زمانی است که زیرسیستم غیر فعالی وجود ندارد و شرایط حل مساله کنترل H_∞ سیستم سوئیچ‌شونده با استفاده از قضیه ۲ توسط فیدبک غیرفعال‌ساز بدست آمده است. در نهایت با شبیه‌سازی دو مثال، کارایی قضایای پیشنهادی نشان داده شده است.

مراجع

- [1] Z. Gao, Z. Wang, Z. Ji, and Y. Liu, "H ∞ control of continuous switched systems based on input and output strict passivity," IET Control Theory & Applications., vol. 12, no. 14, pp. 1951–1955, 2018.
- [2] E. Noghreian and H. R. Koofigar, "Power control of hybrid energy systems with renewable sources (wind-photovoltaic) using switched systems strategy," Sustainable Energy, Grids and Networks, vol. 21, 100280, 2020.
- [3] R. Shorten, K. S. Narendra, and O. Mason, "A result on common quadratic Lyapunov functions," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 1, pp. 110–113, 2003.
- [4] L. Vu and D. Liberzon, "Common Lyapunov functions for families of commuting nonlinear systems," Systems & Control Letters, vol. 54, no. 5, pp. 405–416, 2005.
- [5] M. S. Branicky, "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 43, no. 4, pp. 475–482, 1998.
- [6] N. H. El-Farra, P. Mhaskar, and P. D. Christofides, "Output feedback control of switched nonlinear systems using multiple Lyapunov functions," Systems & Control Letters, vol. 54, no. 12, pp. 1163–1182, 2005.
- [7] X. Sun, G. Liu, W. Wang, and D. Rees, "Stability analysis for networked control systems based on average dwell time method," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 20, no. 15, pp. 1774–1784, 2010.
- [8] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi, and M. Liu, "Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 57, no. 7, pp. 1809–1815, 2011.
- [9] Y. Ren, W. Wang, and Y. Wang, "Incremental stability for switched non-linear systems based on geometrically incremental dissipativity," IET Control Theory & Applications., vol. 12, no. 6, pp. 837–846, 2018.
- [10] J. Zhao and D. J. Hill, "Dissipativity theory for switched systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 4, pp. 941–953, 2008.
- [11] D. Liberzon and A. S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," I IEEE Control Systems Magazine, vol. 19, no. 5, pp. 59–70, 1999.
- [12] P. Peleties and R. DeCarlo, "Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions," American Control Conference, pp. 1679–1684, 1991.
- [13] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, and A. N. Michel, "Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach," International Journal of Systems Science, vol. 32, no. 8, pp. 1055–1061, 2010.
- [14] X. Mao, H. Zhu, W. Chen, and H. Zhang, "New results on stability of switched continuous-time systems with all subsystems unstable," ISA Transactions, vol. 87, pp. 28–33, 2019.
- [15] X. Zhao, X. Zheng, B. Niu, and L. Liu, "Adaptive tracking control for a class of uncertain switched nonlinear systems," Automatica, vol. 52, pp. 185–191, 2015.
- [16] E. Noghreian and H. R. Koofigar, "Adaptive output feedback tracking control for a class of uncertain switched nonlinear systems under arbitrary switching," International Journal of Systems Science, vol. 49, no. 3, pp. 486–495, 2018.
- [17] H. Wang and J. Zhao, "Determining Dissipativity of Switched Nonlinear Systems Using Linearization," Asian Journal of Control, vol. 20, no. 2, pp. 635–645, 2018.
- [18] Y. Dvir, A. Levant, D. Efimov, A. Polyakov, and W. Perruquetti, "Robust passivity-based H ∞ control for uncertain switched nonlinear systems," International Journal of Robust and Nonlinear

- Control, vol. 28, no. 5, pp. 1–23, 2018.
- [19] C. Li and J. Zhao, “Passivity-based H_∞ control for a class of switched nonlinear systems,” *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 38, no. 4, pp. 559–574, 2017.
- [20] Y. Liu, G. S. Stojanovski, M. J. Stankovski, G. M. Dimirovski, and J. Zhao, “Feedback passivation of switched nonlinear systems using storage-like functions,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 9, no. 5, pp. 980–986, 2011.
- [21] Y. Liu and J. Zhao, “Stabilization of switched nonlinear systems with passive and non-passive subsystems,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 3, pp. 1709–1716, 2012.