



دانشگاه صنعتی سهند

DOR:

20.1001.1.23223146.1400.8.1.5.4

نشریه علمی-فنی در مهندسی برق

دوره ۸ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۰

صفحات ۹۹ الی ۱۱۰

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

# طراحی کنترل کننده بهینه برای گروهی از سیستم‌های خطی با تکیه بر

## یک روش بهینه‌سازی غیرخطی

پیمان احمدی<sup>۱</sup> و حسن زرآبادی پور<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران،

p.ahmadi@edu.ikiu.ac.ir

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، دانشیار مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین،

ایران، hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۳۰)

### چکیده

این مقاله به طراحی یک کنترل کننده بهینه برای تعیین همزمان پارامترهای مدل فیزیکی و کنترل کننده LQR می‌پردازد. در بعضی از سیستم‌ها این امکان وجود دارد که برخی از پارامترهای مدل، جهت انتخاب در اختیار طراح قرار گیرند. در روش‌های متداول طراحی کنترل کننده بهینه برای این گروه از سیستم‌ها، ابتدا پارامترهای مدل توسط طراح تعیین می‌شوند، سپس در مرحله جداگانه‌ای به طراحی کنترل کننده برای مدل مشخص پرداخته می‌شود. در این مقاله روشی برای تعیین همزمان این دو دسته از پارامتر برای سیستم‌های خطی پیوسته در زمان ارائه شده است. مسئله تعیین همزمان و بهینه پارامترهای مدل و کنترل کننده یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی و غیرمحدب است که در این مقاله روش جدیدی برای حل این مسئله ارائه شده است. با استفاده از برخی ساده‌سازی‌ها، مسئله غیرخطی و غیرمحدب ذکر شده تبدیل به یک مسئله خطی و محدب می‌شود که توسط جعبه‌ابزار CVX نرم‌افزار متلب قابل حل است. نتیجه این روش، ارائه پاسخی با هزینه کنترلی کمتر نسبت به روش‌های متداول طراحی کنترل کننده بهینه برای این گروه از سیستم‌هاست. با ارائه مثال شبیه‌سازی، بهبود عملکرد روش ارائه شده نشان داده می‌شود.

### واژه‌های کلیدی

کنترل کننده بهینه،

مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب،

LQR.



Sahand University  
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1400.8.1.5.4](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1400.8.1.5.4)

Journal of Nonlinear  
Systems in Electrical  
Engineering

Vol.8, No.1

Spring and Summer 2021

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

# Optimal Controller Design for a Group of Linear Systems Based on a Nonlinear Optimization Method

Peyman Ahmadi<sup>1</sup> and Hassan Zarabadipour<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ph.D. Student, Electrical Engineering Department, Imam Khomeini International University, Iran, [p.ahmadi@edu.ikiu.ac.ir](mailto:p.ahmadi@edu.ikiu.ac.ir)

<sup>2</sup>**Corresponding Author**, Associate Professor, Electrical Engineering Department, Imam Khomeini International University, Iran, [hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir](mailto:hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir)

## ABSTRACT

### Keywords

Optimal Control,  
non-convex Optimization  
Problem,  
LQR.

This paper designs an optimal controller for the simultaneous determination of physical model parameters and LQR controller parameters. In some systems, it is possible to determine some of the model parameters by the designer. In The conventional methods of optimal controller design for this group of systems, first, the model parameters are determined by the designer, and then in The. next step, the controller is designed for the definite model. In this paper, a method for the simultaneous determination of these two sets of parameters is presented for continuous-time linear systems. Simultaneous parameter determination is a nonlinear and non-convex optimization problem that in this paper a new method is proposed to solve this problem. The non-convex optimization problem is transformed into a convex optimization problem by performing simplifications and then solved by the CVX toolbox of MATLAB software. The result is a controller with less control cost in comparison to conventional methods for this group of systems. By providing a simulation example, the performance improvement by the proposed method is shown.

## ۱- مقدمه

تئوری کنترل بهینه تلاش می‌کند تا کنترل کننده‌ای ارائه دهد که با اعمال آن به سیستم، تابع معیار بهینه گردد [۱]. در برخی از سیستم‌ها، بعضی از پارامترهای مدل جهت انتخاب در بازه‌ای معین، در اختیار طراح قرار می‌گیرند (به عنوان مثال فرض کنید این امکان وجود دارد که طول یک قطعه از مدل فیزیکی در بازه‌ی  $l_{\min} \leq l \leq l_{\max}$  برای انتخاب در اختیار طراح قرار گیرد). روش متداول جهت طراحی کنترل بهینه برای این نوع از سیستم‌ها، طراحی پارامترهای مدل و کنترل کننده بصورت جداگانه است، در حالی که طراحی همزمان این دو دسته از پارامتر، عملکردی با هزینه کمتر را نتیجه می‌دهد [۱-۴]. روش طراحی همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده در موضوعات مختلف کنترلی به کار گرفته شده است. از آن جمله می‌توان به سیستم کنترل دمای قطعات مداری [۵]، [۶]، هوا-فضا [۷-۹]، کنترل سوخت وسایل نقلیه هیبریدی [۱۰] و سیستم‌های مکانیکی [۱۱] اشاره کرد.

بطور کلی مسئله محاسبه بهینه و همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده، مسئله‌ای با قیدهای غیرخطی و غیرمحدب است که منجر به یک مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب می‌شود. حل مسائل بهینه‌سازی غیرمحدب بطور کلی دشوار است. یکی از روش‌های عمومی برای حل مسائل محدب تغییر ساختار مسئله و تبدیل آن به مسئله محدب است. این تغییر ساختار با استفاده از ساده‌سازی‌ها، تقریب‌ها و نیز استفاده از معادله‌ها صورت می‌گیرد. در مراجع بسیاری تلاش شده است که راهکاری برای حل مسئله طراحی همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده ارائه شود. برای نمونه در مراجع [۱۲، ۱۳] از روش‌های تکراری<sup>۱</sup> برای حل مسئله مذکور استفاده شده است و در مراجع [۵، ۱۲، ۱۴] از تکنیک BMI<sup>۲</sup> برای حل مسئله استفاده شده است. در [۱۵] تنها به یافتن نقاط کمینه محلی به عنوان حل مسئله اکتفا شده است. در برخی از مراجع مانند [۱۶] نیز سعی شده است که با حل عددی پاسخ مسئله بدست آید. حل مسئله طراحی همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده در سیستم‌های غیرخطی نیز در مراجع متفاوتی چون [۱۷-۱۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. ایده اصلی در گسترش این روش برای سیستم‌های غیرخطی، بهبود روش‌های بر پایه الگوریتم‌های تکراری است که پیش از این به طور گسترده‌ای در طراحی کنترل کننده‌های برخط<sup>۳</sup> بر پایه شبکه‌های عصبی استفاده شده‌اند [۱۹-۲۱]. بسیاری از روش‌های ذکر شده دارای نقص‌هایی هستند. به عنوان نمونه، به دلیل غیرمحدب بودن مسئله، ممکن است چندین نقطه بهینه برای مسئله وجود داشته باشد. حساسیت به شرایط اولیه و عدم تضمین همگرایی روش ذکر شده نیز از معایب و کاستی‌های برخی از روش‌های موجود است. به طور کلی روش‌هایی که از تکنیک BMI استفاده کرده‌اند دارای مشکلاتی از جمله عدم تضمین همگرایی و نوع نقاط بهینه (محلی یا سراسری) هستند [۳، ۱۲]. همچنین در برخی مطالعات تنها شرایط لازم (و نه کافی) برای همگرایی پاسخ مسئله در نظر گرفته شده است که برای نمونه می‌توان مراجع [۱۱، ۲۲] را نام برد. همچنین برقراری شرایط پایداری و تضمین همگرایی در روش‌های حل عددی برای این مسئله، دشوار و غیرقابل دسترسی است [۱۳]. مجموعه‌ای از شرایط لازم و کافی برای تضمین همگرایی و پایداری در مسئله بهینه‌سازی مورد نظر در مراجع [۱۷، ۲۳] ارائه شده است.

این مقاله به بیان یک روش جدید برای حل مسئله غیرمحدب ذکر شده می‌پردازد، که همگرایی روش و پایداری سیستم کنترل طراحی شده تضمین شده است. حل مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب تعیین همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده با تبدیل آن به

<sup>۱</sup> Iterative

<sup>۲</sup> Bilinear Matrix Inequality

<sup>۳</sup> Online

مسئله محدب از نوع  $SDP^1$  [۲۴]، انجام می‌شود. با تبدیل مسئله غیرمحدب به مسئله محدب، یک نقطه بهینه سراسری برای مسئله پیدا می‌شود. پس از حل مسئله بهینه‌سازی و طراحی کنترل کننده پیشنهادی، مثال شبیه‌سازی ارائه می‌شود و نتایج آن با نتایج کنترل کننده LQR مقایسه می‌شود.

ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲، مسئله بهینه‌سازی مورد نظر توصیف خواهد شد. بخش ۳ به ارائه راهکاری برای تبدیل مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب به محدب و حل آن می‌پردازد. بخش ۴ به ارائه مثال شبیه‌سازی و تحلیل نتایج آن می‌پردازد و در بخش ۵ نتیجه‌گیری‌های حاصل ارائه می‌شود.

در نگارش این مقاله از علائم اختصاری زیر استفاده شده است:

علامت‌های  $0 \leq$  و  $0 >$  به ترتیب نشان‌دهنده مثبت نیمه‌معین و مثبت معین بودن ماتریس‌ها هستند.  $x \in \mathbb{R}^n$  نشان می‌دهد که برداری  $n$  بعدی از مجموعه اعداد حقیقی است.  $A_C(\theta)$  ماتریس سیستم حلقه‌بسته است که  $\theta$  بردار حاوی پارامترهای قابل انتخاب است. Min بیانگر کمترین مقدار و Max بیانگر بیشترین مقداری است که پارامترها می‌توانند اختیار کنند. همچنین، Init بیانگر مقدار اولیه انتخابی و نیز Opt نشان‌دهنده مقدار بهینه پارامترهای محاسبه شده است.

## ۲- بیان مسئله

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= C(\theta)x + D(\theta)u \end{aligned} \quad (1)$$

که  $x \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت‌های سیستم و  $u \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی‌های کنترلی سیستم است.  $A(\theta)$ ،  $B(\theta)$ ،  $C(\theta)$  و  $D(\theta)$  ماتریس‌های فضای حالت سیستم هستند. همچنین  $\theta \in \mathbb{R}^l$  بردار پارامترهای سیستم است که توسط طراح قابل انتخاب می‌باشد. منطقی است که طراح، عناصر بردار  $\theta$  را تنها در یک بازه محدود مانند  $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$  می‌تواند انتخاب کند. همچنین برای سادگی در این مقاله  $D(\theta) = 0$  و  $C(\theta) = I_n$  فرض می‌شود. هدف، طراحی همزمان پارامترهای بردار  $\theta$  و نیز تعیین پارامترهای بردار  $K$  در کنترل کننده  $u = Kx$  است، بطوری که تابع معیار (۲) کمینه شود و سیستم حلقه‌بسته پایدار باشد.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2)$$

که  $Q = Q^T \geq 0$  و  $R = R^T > 0$  ماتریس‌های وزنی انتخابی هستند. با اعمال کنترل کننده، ماتریس سیستم حلقه‌بسته بصورت زیر درمی‌آید:

$$A_C(\theta) = A(\theta) + B(\theta)K \quad (3)$$

<sup>1</sup> Semi-Definite Programming

اگر ماتریس  $P$ ، با شرایط  $P = P^T > 0$  وجود داشته باشد که در معادله زیر صدق کند، آن‌گاه با در نظر گرفتن  $K = -R^{-1}B^T(\theta)P$ ، ماتریس (۳) هر ویتز خواهد بود [۲۵].

$$0 = A_c^T(\theta, K)P + PA_c(\theta, K) + Q + K^T RK \quad (4)$$

با این توضیحات، مسئله بهینه‌سازی کلی برای بدست آوردن بهینه و همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده بصورت زیر قابل نوشتن است:

$$\begin{aligned} \text{minimize } J &= \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \\ \text{s.t. } \quad 0 &= A_c^T(\theta, K)P + PA_c(\theta, K) + Q + K^T RK \quad (5-1) \\ A_c(\theta, K) &\text{ is Hurwitz} \quad (5-2) \\ \theta_{\min} &\leq \theta \leq \theta_{\max} \quad (5-3) \end{aligned} \quad (5)$$

قید (۵-۱)، نسبت به پارامترهای بهینه‌سازی غیرمحدب است و قید (۵-۲) نیز غیرخطی است. بنابراین با شرایط موجود حل مسئله (۵) با الگوریتم‌های متداول حل کننده‌های<sup>۱</sup> مسائل بهینه‌سازی قابل حل نیست. در بخش بعد به ارائه راهکاری برای حل این مسئله پرداخته می‌شود.

### ۳- ارائه روش جدید برای حل مسئله بهینه‌سازی تعیین همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده

در این بخش، با استفاده از قضایای موجود و با تغییراتی که در ساختار مسئله بهینه‌سازی (۵) داده می‌شود، روشی برای حل آن ارائه می‌شود و در ادامه یک الگوریتم تکراری برای طراحی همزمان پارامترهای کنترل کننده و مدل ارائه می‌شود.

#### ۳-۱- تبدیل مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب به یک مسئله محدب

تابع هزینه داده شده در رابطه (۲) را بصورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt = x_0^T \left( \int_0^\infty e^{Ac^T t} (Q + K^T RK) e^{Ac} dt \right) x_0 = x_0^T P x_0 \quad (6)$$

بنابراین با تغییر تابع هزینه، مسئله بهینه‌سازی (۵) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \text{minimize } &x_0^T P x_0 \\ \text{s.t. } \quad 0 &= A_c^T(\theta, K)P + PA_c(\theta, K) + Q + K^T RK \quad (7-1) \\ A_c(\theta, K) &\text{ is Hurwitz} \quad (7-2) \\ \theta_{\min} &\leq \theta \leq \theta_{\max} \quad (7-3) \end{aligned} \quad (7)$$

لم (۱) اثبات می‌شود که دو عبارت زیر معادل هم هستند:

<sup>۱</sup> Solvers

$$A_c^T(\theta, K)P + PA_c(\theta, K) + Q + K^T RK = 0 \equiv A_c^T(\theta, K)P + PA_c(\theta, K) + Q + K^T RK \leq 0 \quad (8)$$

بنابراین قید تساوی (۵-۱) در مسئله بهینه‌سازی (۵)، بصورت قید نامساوی ماتریسی فوق قابل نوشتن است [۲۴].

در گام اول ساده‌سازی، با استفاده از لم ۱، مسئله بهینه‌سازی (۷)، به مسئله زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} & \underset{\theta, P, K}{\text{minimize}} \quad x_0^T P x_0 \\ & \text{s.t.} \quad A_c^T(\theta, K)P + PA_c(\theta, K) + Q + K^T RK \leq 0 \quad (9-1) \\ & \quad \quad A_c(\theta, K) \text{ is Hurwitz} \quad (9-2) \\ & \quad \quad \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \quad (9-3) \end{aligned} \quad (9)$$

نتیجه عبارت  $K^T RK$  از قید (۹-۱) در مسئله (۹)، یک ماتریس است و چنین ترکیبی توسط حل کننده‌های عمومی مسائل بهینه‌سازی (از جمله جعبه‌ابزار CVX نرم‌افزار متلب<sup>۱</sup>) قابل حل نیست. همچنین عناصر ماتریس  $A_c(\theta, K)$  و ماتریس  $P$ ، از پارامترهای مسئله بهینه‌سازی هستند که نتیجه کلی، قیدی غیرمحدب است و مسئله بهینه‌سازی را تبدیل به مسئله غیرمحدب کرده است. به همین دلیل در ادامه سعی شده است که این قید، تبدیل به قید محدب شود. بنابراین در گام دوم ساده‌سازی، بدون از دست دادن کلیت مسئله،  $K$  از پارامترهای بهینه‌سازی حذف شده و در مرحله جداگانه‌ای با حل معادله (۴) محاسبه خواهد شد. همچنین با اعمال تغییر متغیرهای  $\Delta P = P - P_i$  و  $\Delta A_c(\theta, K) = A_c(\theta, K_i) - A_c(\theta_i, K_i)$  می‌توان قید (۹-۱) را به قید محدب زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} & (\Delta A_c(\theta, K) + A_c(\theta_i, K_i))^T (P + \Delta P) + (P + \Delta P)(\Delta A_c(\theta, K) + A_c(\theta_i, K_i)) + Q + K_i^T R K_i \leq 0 \\ & \Delta A_c(\theta, K) \Delta P \approx 0 \rightarrow \Delta A_c^T P_i + A_c^T(\theta_i) \Delta P + A_c^T(\theta_i) P_i + \\ & \quad (\Delta A_c^T P_i + A_c^T(\theta_i) \Delta P + A_c^T(\theta_i) P_i)^T + Q + K_i^T R K_i \leq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن  $P_i$  با حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$P_i A_c(\theta_i, K_i) + A_c^T(\theta_i, K_i) P_i + Q + K_i^T R K_i = 0 \quad (11)$$

با اعمال تغییر متغیرهای ذکر شده، مسئله بهینه‌سازی به فرم زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} & \underset{\theta, \Delta P}{\text{minimize}} \quad x_0^T P x_0 \\ & \text{s.t.} \quad \Delta A_c^T P_i + A_c^T(\theta_i) \Delta P + A_c^T(\theta_i) P_i + (\Delta A_c^T P_i + A_c^T(\theta_i) \Delta P + A_c^T(\theta_i) P_i)^T + Q + K_i^T R K_i \leq 0 \quad (12-1) \\ & \quad \quad A_c(\theta, K) \text{ is Hurwitz} \quad (12-2) \\ & \quad \quad \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \quad (12-3) \end{aligned} \quad (12)$$

مسئله (۱۲) هنوز مسئله‌ای غیرمحدب است، چرا که (۱۲-۲) قیدی غیرخطی است.

**لم ۲** فرض کنید که  $K_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  بهره کنترل کننده است. اگر ماتریس متقارن و مثبت معین  $P_k$  وجود داشته باشد که در معادله زیر صدق کند:

<sup>۱</sup> Matlab

$$A_{CL}^T P_k + P_k A_{CL} + Q_k + K_k^T R_k K_k = 0 \quad (۱۳)$$

اثبات می‌شود که  $A_{CL}$  هر ویتز است که در آن  $K_k = -R_k B_k^T P_k$  و  $A_{CL} = A_k + B_k K_k$  است [۲۵].

لم ۳) دو عبارت زیر معادل هم هستند:

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}, S = C - B^T A^{-1} B \quad (۱۴)$$

$$X \succ 0 \text{ if and only if } A \succ 0 \text{ and } S \succ 0.$$

این تبدیل، به قضیه Schur Complement موسوم است [۲۴].

با استفاده از لم ۲ و لم ۳، مسئله بهینه‌سازی نهایی به فرم زیر قابل نوشتن است:

$$\begin{aligned} & \min_{\theta, \Delta P} x_0^T P x_0 \\ & \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} R^{-1} & K_i \\ K_i^T & X(\theta, \Delta P) \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & X(\theta, \Delta P) = \Delta A_c^T P_i + A_c^T(\theta_i) \Delta P + A_c^T(\theta_i) P_i + (\Delta A_c^T P_i + A_c^T(\theta_i) \Delta P + A_c^T(\theta_i) P_i)^T + Q \\ & P_i + \Delta P \succ 0 \\ & \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \end{aligned} \quad (۱۵)$$

مسئله بهینه‌سازی (۱۵)، محدب بوده و از نوع SDP می‌باشد که توسط حل-کننده‌های متداول قابل حل است.

### ۳-۲- الگوریتم تکراری برای حل بهینه‌سازی

در این بخش مراحل الگوریتم تکراری برای حل مسئله بهینه‌سازی (۱۵) ارائه می‌شود:

الف) تعیین مقادیر اولیه  $\theta_0$  و  $K_0$  بطوری که  $\theta_{\min} \leq \theta_0 \leq \theta_{\max}$  و  $A_c(\theta_0, K_0)$  هر ویتز باشد.

ب) تعیین  $P_i$  با حل معادله  $P_i A_c(\theta_i, K_i) + A_c^T(\theta_i, K_i) P_i + Q + K_i^T R K_i = 0$ .

ج) حل مسئله بهینه‌سازی (۱۵).

د) محاسبه  $K_{i+1}$  با استفاده از رابطه  $K_{i+1} = -R^{-1} B^T(\theta_{i+1}) P$ .

ه) تکرار الگوریتم تا رسیدن به شرط توقف  $\|P_i - P_{i-1}\| < \varepsilon$ .

در مرحله (الف)، ضرایب  $\theta$  و  $K$  برای شروع الگوریتم انتخاب می‌شوند و در مراحل بعدی و در هر تکرار یکبار بصورت همزمان تعیین می‌شوند (در مراحل (ج) و (د)). پس از برقراری شرط توقف الگوریتم در مرحله (ه)، الگوریتم متوقف شده و ضرایب  $\theta$  و  $K$  حاصل شده از آخرین مرحله تکرار، پاسخ مسئله خواهند بود.

## ۴- شبیه‌سازی

در این بخش، شبیه‌سازی حاصل از اعمال کنترل پیشنهادی روی سیستم نمونه ارائه می‌شود و نتایج آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای حل مسئله بهینه‌سازی از جعبه‌ابزار CVX نرم‌افزار متلب استفاده شده است.

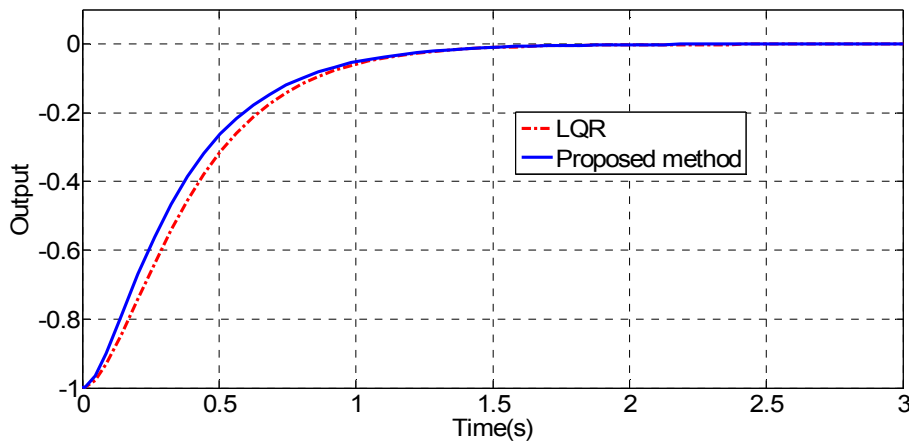
سیستم توصیف شده در (۱) با ماتریس‌های داده شده‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10\theta_1 - 10\theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10\theta_2 & -\theta_3 & -\theta_4 \end{bmatrix}, B(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 + \theta_2 \\ 0 \\ -\theta_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$C(\theta) = [1 \ 0 \ 0 \ 0], D(\theta) = 0$$

کنترل کننده  $u = Kx$  را در نظر گرفته و مسئله بهینه‌سازی (۱۵) برای محاسبه همزمان پارامترهای سیستم و کنترل کننده با هدف کمینه شدن تابع معیار (۱۷) حل خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی به ازای مقادیر اولیه  $x_0 = [-1, 0, 0, 0]^T$  در ادامه آورده می‌شود.

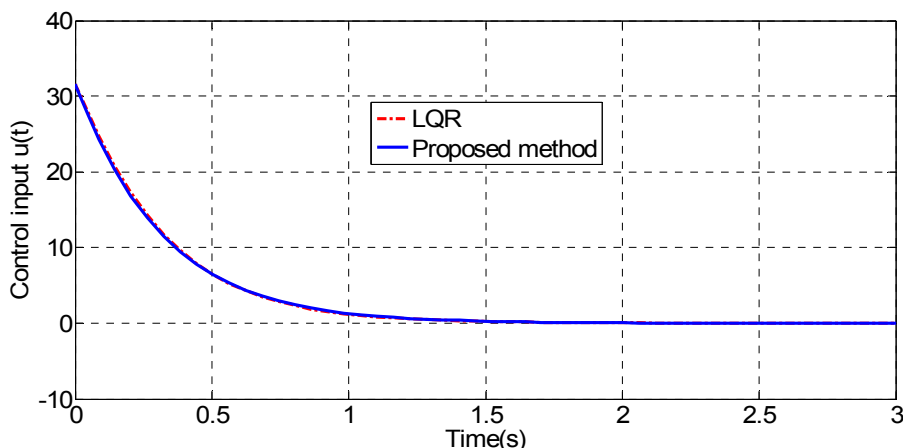
$$J(x_0, \theta, u) = \int_0^{\infty} (1000x_1^2 + 10x_2^2 + 10x_3^2 + x_4^2 + u^2) dt \quad (17)$$



شکل ۱. خروجی سیستم به ازای دو کنترل کننده LQR و کنترل پیشنهادی

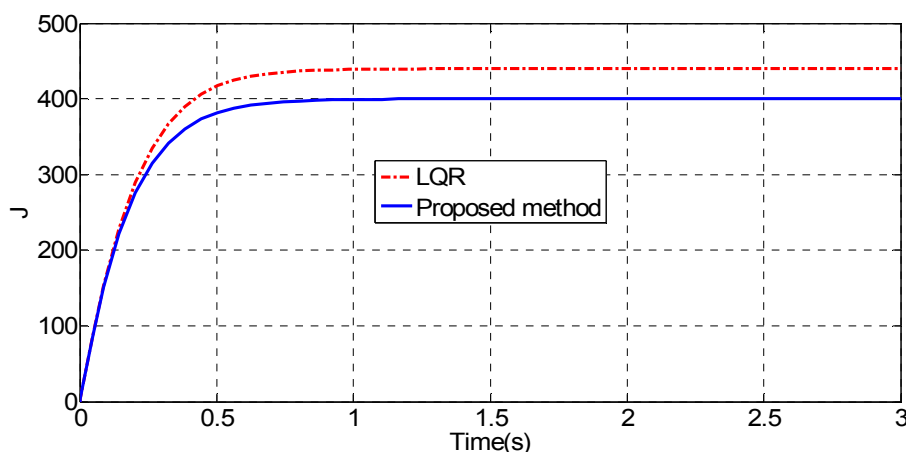
بردار پارامترهای سیستم بصورت  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T$  است. شکل ۱، خروجی سیستم به ازای دو نوع کنترل کننده LQR و کنترل پیشنهادی که از حل مسئله بهینه‌سازی بدست آمده است را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که به ازای هر دو نوع کنترل کننده، خروجی با معیارهای مناسب پاسخ گذرا به مقدار مطلوب همگرا شده است. همچنین شکل ۲ نیز ورودی کنترلی به ازای دو روش را نشان می‌دهد. سیگنال کنترلی به ازای هر دو کنترل کننده دارای دامنه و فرکانس تغییرات مطلوبی می‌باشد.



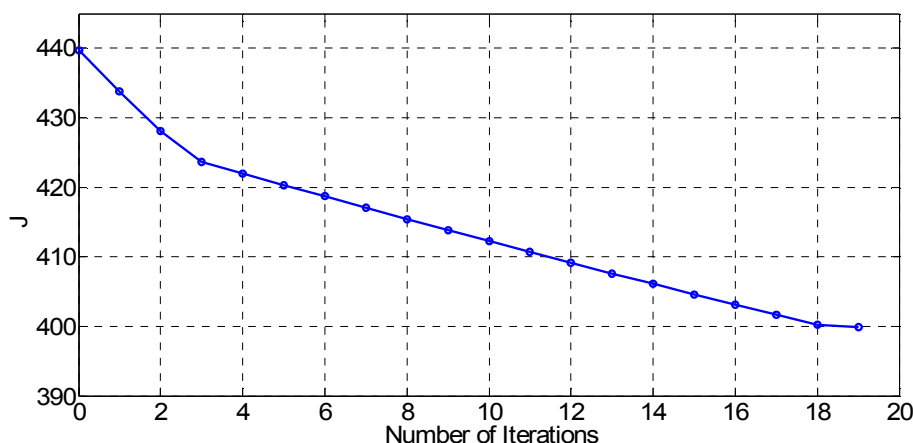


شکل ۲. ورودی‌های کنترلی به ازای دو کنترل کننده LQR و کنترل پیشنهادی

تعیین همزمان پارامترهای کنترل کننده و مدل باعث می‌شود که کنترلی با هزینه کمتر نسبت به کنترل LQR حاصل شود، که این مشخصه با رسم شکل تغییرات تابع معیار به ازای دو روش مختلف قابل مقایسه است. این مقایسه در شکل ۳ نشان داده شده است. همان گونه که دیده می‌شود، به ازای اعمال کنترل کننده پیشنهادی، تابع هزینه دارای مقدار کمتری نسبت به روش LQR است. در طراحی کنترل کننده با معیار LQR، ماتریس‌های  $A$  و  $B$  سیستم باید ثابت باشند. مثال شبیه‌سازی دارای ماتریس‌هایی حاوی پارامترها است که طراح می‌تواند آن‌ها را تعیین کند. برای طراحی کنترل LQR لازم است که ابتدا پارامترهای مدل انتخاب شوند و سپس برای مدل مشخص، کنترل LQR طراحی کرد. مقادیر اولیه پارامترها و همچنین بازه انتخاب آن‌ها و مقادیر بهینه حاصل از الگوریتم پیشنهادی در جدول ۱ آورده شده‌اند. همچنین شکل ۴ نشان می‌دهد که الگوریتم، پس از ۱۹ تکرار به مقدار مطلوب همگرا شده است.



شکل ۳. نمایش تغییرات تابع هزینه با زمان به ازای دو کنترل کننده LQR و کنترل پیشنهادی



شکل ۴. نمایش تغییرات تابع هزینه در هر تکرار الگوریتم روش پیشنهادی

جدول ۱. پارامترهای قابل انتخاب مدل، بازه تغییرات و مقادیر اولیه آن‌ها

Param.	Min.	Max.	Init.	Opt.
$\theta_1$	۰/۴	۱/۲	۰/۷	۱/۲
$\theta_2$	۰/۰۴	۰/۰۷۸	۰/۰۶۵	۰/۰۷۸۰
$\theta_3$	۰/۴۵	۰/۹	۰/۷	۰/۷۹۱۳
$\theta_4$	۰/۰۱	۰/۰۸	۰/۰۱۵	۰/۰۸۰۰

## ۵- نتیجه گیری

در برخی از سیستم‌های کنترل، می‌توان پارامترهایی از مدل را برای انتخاب به طراح سپرد. در طراحی کنترل کننده بهینه برای این سیستم‌ها، بطور معمول ابتدا پارامترهای مدل توسط طراح انتخاب می‌شوند و سپس برای سیستم مشخص، کنترل کننده طراحی می‌شود. تعیین جداگانه این پارامترها باعث افزایش هزینه کنترلی می‌شود. در این مقاله، پارامترهای مدل و کنترل کننده بطور همزمان تعیین شدند. تعیین همزمان این پارامترها منجر به شکل گیری مسئله بهینه‌سازی غیرخطی و غیرمحدب شد. با استفاده از قضایای موجود، مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب تبدیل به مسئله بهینه‌سازی محدب معادل جدیدی از نوع SDP شد. با جمع بندی صورت گرفته، روش طراحی همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده در قالب الگوریتمی تکراری ارائه شد که توسط جعبه ابزار CVX نرم افزار متلب قابل اجرا است. برای نشان دادن مزایای روش پیشنهادی، یک مثال شبیه سازی ارائه شد. نتایج شبیه سازی نشان داد که در روش پیشنهادی با تعیین همزمان پارامترهای مدل و کنترل کننده، کنترل کننده‌ای با هزینه کنترلی کمتر بدست می‌آید. همچنین روش پیشنهاد شده دارای کاستی‌هایی است، به عنوان نمونه، این روش قابل اعمال به سیستم‌های غیرخطی نیست.

## مراجع

- [1] K. Mathiyalagan and G. Sangeetha, "Finite-time stabilization of nonlinear time delay systems using LQR based sliding mode control," in *Journal of the Franklin Institute*, 2019, vol. 356, no. 7, pp. 3948-3964.
- [2] M. M. Da Silva, O. Bruls, W. Desmet, and H. Van Brussel, "Integrated structure and control design for mechatronic systems with configuration-dependent dynamics," in *Mechatronics*, 2009, vol. 19, no. 6, pp. 1016-1025.
- [3] J. Ban, M. Seo, T. Goh, H. Jeong, and S. W. Kim, "Improved co-design of event-triggered dynamic output feedback controllers for linear systems," in *Automatica*, 2020, vol. 111, p. 108600.
- [4] M. Moradi, M. Naraghi, and A. Kamali Eigoli, "Optimal codesign of controller and linear plants with input saturation: The sensitivity Lyapunov approach," in *Optimal Control Applications and Methods*, 2018, vol. 39, no. 2, pp. 622-637.
- [5] A. L. Nash and N. Jain, "Hierarchical Control Co-Design Using a Model Fidelity-Based Decomposition Framework," in *Journal of Mechanical Design*, 2020, vol. 143, no. 1.
- [6] Q. Wei and D. Liu, "Data-driven neuro-optimal temperature control of water-gas shift reaction using stable iterative adaptive dynamic programming," in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, vol. 61, no. 11, pp. 6399-6408.
- [7] A. L. Hale, R. J. Lisowski, and W. E. Dahl, "Optimal simultaneous structural and control design of maneuvering flexible spacecraft," in *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1985, vol. 8, no. 1, pp. 86-93.
- [8] R. teja Nallapu and J. Thangavelautham, "Automated Design Architectures for Co-orbiting Spacecraft Swarms for Planetary Moon Mapping," in *Advances in Space Research*, 2020.
- [9] E. N. Van, D. Alazard, C. Doll, and P. Pastor, "Co-design of aircraft vertical tail and control laws using distributed electric propulsion," in *IFAC-PapersOnLine*, 2019, vol. 52, no. 12, pp. 514-519.
- [10] M. Sorrentino, V. Cirillo, and L. Nappi, "Development of flexible procedures for co-optimizing design and control of fuel cell hybrid vehicles," in *Energy Conversion and Management*, 2019, vol. 185, pp. 537-551.
- [11] D. L. Peters, P. Papalambros, and A. Ulsoy, "Control proxy functions for sequential design and control optimization," in *Journal of Mechanical Design*, 2011, vol. 133, no. 9.
- [12] P. V. Chanekar, N. Chopra, and S. Azarm, "Co-design of linear systems using generalized benders decomposition," in *Automatica*, 2018, vol. 89, pp. 180-193.
- [13] Y. Jiang, Y. Wang, S. A. Bortoff, and Z.-P. Jiang, "An iterative approach to the optimal co-design of linear control systems," in *International Journal of Control*, 2016, vol. 89, no. 4, pp. 680-690.
- [14] H. D. Tuan P. Apkarian, "Low nonconvexity-rank bilinear matrix inequalities: algorithms and applications in robust controller and structure designs," in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, vol. 45, no. 11, pp. 2111-2117.
- [15] S. Kaney, C. Scherer, M. Verhaegen, and B. De Schutter, "Robust output-feedback controller design via local BMI optimization," in *Automatica*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 1115-1127.
- [16] J. T. Allison, T. Guo, and Z. Han, "Co-design of an active suspension using simultaneous dynamic optimization," *Journal of Mechanical Design*, 2014, vol. 136, no. 8.
- [17] Y. Jiang, Y. Wang, S. A. Bortoff, and Z.-P. Jiang, "Optimal codesign of nonlinear control systems based on a modified policy iteration method," in *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2015, vol. 26, no. 2, pp. 409-414.
- [18] Y. Wang and S. A. Bortoff, "Co-design of nonlinear control systems with bounded control inputs," in *Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2014, pp. 3035-3039: IEEE.
- [19] T. Hanselmann, L. Noakes, and A. Zaknich, "Continuous-time adaptive critics," in *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2007, vol. 18, no. 3, pp. 631-647.
- [20] D. Vrabie and F. Lewis, "Neural network approach to continuous-time direct adaptive optimal control for partially unknown nonlinear systems," in *Neural Networks*, 2009, vol. 22, no. 3, pp. 237-246.
- [21] Z. Chen and S. Jagannathan, "Generalized Hamilton-Jacobi-Bellman formulation-based neural network control of affine nonlinear discrete-time systems," in *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008 vol. 19, no. 1, pp. 90-106.

- [22] R. Patil, Z. Filipi, and H. Fathy, "Computationally efficient combined plant design and controller optimization using a coupling measure," in *Journal of Mechanical Design*, 2012, vol. 134, no. 7.
- [23] J. Lu and R. E. Skelton, "Integrating structure and control design to achieve mixed h2/h performance," in *International Journal of Control*, 2000, vol. 73, no. 16, pp. 1449-1462.
- [24] S. Boyd, S. P. Boyd, and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [25] Y. Jiang and Z.-P. Jiang, "Computational adaptive optimal control for continuous-time linear systems with completely unknown dynamics," in *Automatica*, 2018, vol. 48, no. 10, pp. 2699-2704.