



دانشگاه صنعتی شاهر

DOR:

20.1001.1.23223146.1400.8.2.3.4

نشریه علمی غیرخطی در مهندسی برق

دوره ۸ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۰

صفحات ۳۸ الی ۶۲

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

# طراحی کنترل مد لغزشی مرتبه کسری مبتنی بر قانون تطبیق غیر خطی برای پایدارسازی و همزمان سازی کلاسی از سیستم های آشوبناک مرتبه کسری

عباس کریمی نیا<sup>۱</sup> و حسن زرآبادی پور<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده مهندسی برق، دانشگاه بین المللی امام خمینی، قزوین، [abbas.kariminia@gmail.com](mailto:abbas.kariminia@gmail.com)

<sup>۲</sup>آنویسنده مسؤل، استادیار دانشکده مهندسی برق، دانشگاه بین المللی امام خمینی، قزوین،

[hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir](mailto:hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir)

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۱۸)

## چکیده

در این مقاله، پایدارسازی و همزمان سازی سیستم های آشوبناک لورنز و چن در حضور عدم قطعیت به کمک استراتژی کنترل مد لغزشی مرتبه کسری مبتنی بر قوانین تطبیق غیر خطی مورد بررسی قرار می گیرد. سیستم های لورنز و چن معرف مدل های دینامیکی مرتبه سوم هستند که به ازای پارامترهایی خاص از رفتاری آشوبناک برخوردار هستند. قانون کنترل پیشنهادی از دو بخش کنترل مد لغزشی و قانون کنترل تطبیقی تشکیل شده است. ابتدا با فرض اینکه اطلاعات لحظه ای بخش غیر خطی دینامیک سیستم آشوبناک در دسترس نیست، از معادله رگرسیون خطی شامل یک بخش نامعلوم استفاده می شود. به کمک تئوری پایداری لیاپانوف و بر اساس اصول حساب مرتبه کسری، قانون تطبیقی برای تخمین لحظه ای بخش نامعلوم توسعه می یابد. همچنین، با تعریف سطوح لغزش بر حسب سیگنال های خطا و تحقق شرط دسترسی نمایی برای تضمین پایداری حلقه بسته، قانون کنترل مد لغزشی شامل دو بخش کنترل معادل و کلیدزنی استخراج می شود. قانون کنترل نهایی با تلفیق قوانین کنترل مد لغزشی و تطبیقی استخراج می شود. ویژگی مهم رویکرد پیشنهادی قابلیت مواجهه با عدم قطعیت های غیر انطباق یافته و اثرات غیر خطی دینامیک سیستم های آشوبناک و هدایت متغیرهای حالت به سمت سطح لغزش به ازای شرایط اولیه دلخواه است. روش پیشنهادی برای کلاسی از سیستم های دینامیکی که قابل تفکیک به دو بخش خطی و غیر خطی هستند، قابل توسعه است و برای سیستم های دارای تاخیر معتبر نیست. عملکرد الگوریتم پیشنهادی با تحقق پایدارسازی برای سیستم آشوبناک لورنز و همزمان سازی دو سیستم آشوبناک لورنز و چن ارزیابی و تحلیل می شود.

## واژه های کلیدی

کنترل مد لغزشی مرتبه کسری،  
قانون تطبیق غیر خطی،  
سیستم آشوبناک لورنز،  
سیستم آشوبناک چن،  
عدم قطعیت.



Sahand University  
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1400.8.2.3.4](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1400.8.2.3.4)

Journal of Nonlinear  
Systems in Electrical  
Engineering

Vol.8, No.2

Autumn and Winter 2021

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

# Design of Fractional-Order Sliding Mode Control Based on Nonlinear Adaptive Law to Stabilize and Synchronize a Class of Fractional-Order Chaotic Systems

A. Kariminia<sup>1</sup> and H. Zarabadipour<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Electrical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Tehran, Iran, Email: Abbas.kariminia@gmail.com

<sup>2</sup>**Corresponding Author**, Department of Electrical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Tehran, Iran, Email: hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir

## ABSTRACT

### Keywords

Fractional-order sliding mode control,  
nonlinear adaptive law,  
chaotic Lorenz system,  
chaotic Chen system,  
uncertainty.

In this paper, stabilization and synchronization problems of chaotic Lorenz and Chen systems in the presence of uncertainties have been addressed. using fractional-order sliding mode control based on nonlinear adaptive law The Lorenz and Chen systems are third-order dynamical systems that have chaotic behavior for certain parameters. The proposed control laws is composed of two parts including sliding mode control and adaptive control laws. First, by assuming that the instantaneous information of the nonlinear part of the chaotic dynamics is not available, a linear regression equation including a nonlinear part is formed. Using the Lyapunov stability theorem and fractional-order calculus, an adaptive law is developed to instantly estimate the nonlinear part. In addition, by defining the sliding surfaces based on error signals and satisfying reaching laws to ensure the closed-loop stability, sliding mode control including equivalent and switching controls are derived. The final control law is obtained by combining sliding mode and adaptive controls. The main aspect of the proposed approach is the ability to overcome the unmatched uncertainties and nonlinear effects of the chaotic dynamical system as well as steer the state variables to the sliding surface for any arbitrary initial conditions. The proposed method can be extended to a class of dynamical systems that can be decomposed into linear and nonlinear parts. This method cannot be verified for delayed systems. The performance of the proposed algorithm has been assessed by stabilization of the Chaotic Lorenz system and synchronization between Chaotic Lorenz and Chen systems.

## ۱- مقدمه

مطالعات صورت گرفته روی دینامیک‌های غیرخطی نشان می‌دهد که آشوب به شکل گسترده‌ای در سیستم‌های طبیعی و مهندسی اتفاق می‌افتد. در گذشته پدیده آشوب به‌عنوان نویز شناخته می‌شد. در واقع، آشوب به‌عنوان رفتاری بی‌قاعده و غیرقابل پیش‌بینی مورد توجه قرار می‌گرفت و اغلب به تأثیرات خارجی تصادفی نسبت داده می‌شد. امروزه، پدیده‌های آشوبناک برای سیستم‌های غیرخطی خاص کاملاً قطعی و معین هستند. آشوب، رفتار نامنظم یک معادله قطعی ساده است. طبیعت گذشته این سیستم‌ها بیان می‌دارد که الگوهای معینی در شکل موج به‌صورت نامنظم در بازه‌های غیرتناوبی تکرار می‌شوند و هیچ‌گاه یک تکرار کاملاً مشابه اتفاق نمی‌افتد. خاصیت ذاتی یک سیستم آشوبناک این است که به‌صورت مجانبی پایدار نیست. پاسخ این‌گونه سیستم‌ها به شدت نسبت به شرایط اولیه حساس می‌باشد. در واقع، با اعمال یک تغییر کوچک در شرایط اولیه، پاسخ عوض می‌شود. به عبارت دیگر، یک سیستم دینامیکی که نسبت به شرایط اولیه بر روی یک مجموعه بسته نامتغیر، حساس و وابسته باشد، آشوبناک خوانده می‌شود [۱].

سیستم‌های عملی زیادی از ماهیت آشوبناک برخوردار هستند که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به سیستم آشوبناک مشعل پلاسما از نوع میله‌ای [۲]، سیستم اقتصادی آشوبناک [۳]، راکتور شیمیایی آشوبناک [۴] و مدار الکتریکی آشوبناک [۵-۶] اشاره کرد. دو مسئله اساسی در حوزه سیستم‌های آشوبناک، پایدارسازی و همزمان‌سازی است. در بحث نخست، هدف میرا کردن رفتار نوسانی دامنه محدود سیگنال‌های آشوبناک به‌طور مجانبی به مبدأ و در بحث دوم، همگرایی رفتار یک سیستم آشوبناک به پاسخ دینامیکی سیستم آشوبناک دیگر است. در سال‌های اخیر، سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری از جایگاه قابل توجهی برخوردار شده‌اند. در واقع نشان داده شده است که حتی دینامیک‌های آشوبناک معروف چون لورنز نیز می‌توانند با ماهیتی مرتبه کسری ارائه شوند.

تحقیقات زیادی در زمینه پایدارسازی و همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری انجام گرفته است. در [۷]، از کنترل پسگام تطبیقی بهینه برای مبدل الکترومکانیکی با میدان مغناطیسی آشوبناک مرتبه کسری استفاده شده است. ابتدا تحلیل دینامیکی به کمک دیاگرام فاز و تاریخچه زمانی انجام شده و به کمک یک سیستم کمکی، اثرات اشباع ورودی جبران شده است. قوام حلقه بسته با تخمین لحظه‌ای بخش نامعلوم دینامیک سیستم تضمین شده است. در [۸] از کنترل کننده مد لغزشی انتگرالی برای جبران‌سازی سیستم آشوبناک مرتبه کسری در حضور اغتشاشات استفاده شده است. همگرایی زمان محدود همراه با تخمین کران بالای عدم قطعیت از ویژگی‌های این روش است. در [۹] مسئله همزمان‌سازی به کمک کنترل پسگام تطبیقی مورد توجه قرار گرفته است که در آن، تخمین بخش نامعلوم دینامیک سیستم به کمک منطق فاز انجام گرفته است. در [۱۰] پایدارسازی و همزمان‌سازی برای کلاسی از سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری با پارامترهای نامعلوم به کمک کنترل پسگام تطبیقی تحقق یافته است. در [۱۱] از قانون تطبیق پارامتری برای توسعه الگوریتم کنترل تطبیقی جهت همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری استفاده شده که در آن، تحلیل ریسک بر مبنای رویکردی بهینه برای انتخاب کنترل کننده با ساختار مناسب انجام گرفته است. در [۱۲] همزمان‌سازی با فرض وجود پارامترهای متغیر با زمان در سیستم آشوبناک مرتبه کسری مورد توجه قرار گرفته که در آن، قانون کنترل غیرخطی مبتنی بر تئوری لیاپانوف استخراج شده است.

در [۱۳] از کنترل مد لغزشی برای همزمان‌سازی کلاسی از سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری شامل بخش خطی و غیرخطی در حضور عدم قطعیت استفاده شده است. قانون کنترل از دو بخش کلیدزنی مبتنی بر تخمین کران بالای عدم قطعیت و بخش کنترل معادل برای حذف اثرات غیرخطی دینامیک سیستم تشکیل شده است. در [۱۴] از تلفیق کنترل مد لغزشی و رویکرد اغتشاش برای توسعه یک برنامه همزمان‌سازی تطبیقی استفاده شده است که در آن، خطای تقریب اغتشاش به‌طور مجانبی به مبدأ همگرا می‌شود. در [۱۵] مسئله همزمان‌سازی در حضور غیرخطی‌های ورودی به کمک کنترل تطبیقی فازی تحقق یافته است. دو سیستم آشوبناک تحت عنوان رهبر-پیرو دارای مدل‌های مجزا، مرتبه کسری مختلف و اغتشاشات خارجی دینامیکی هستند. در برنامه کنترلی، قانون کنترل تطبیقی فازی برای تقریب عدم قطعیت و قانون ساختار متغیر مرتبه کسری برای مواجهه با اثرات غیرخطی ورودی استفاده شده است. در [۱۶] از کنترل مد لغزشی ترمینال برای همگرایی زمان محدود در برنامه همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک استفاده شده است. کران بالای عدم قطعیت به شیوه‌ای تطبیقی تخمین زده شده و جبران‌سازی در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری و اغتشاشات خارجی انجام گرفته است.

در [۱۷] از کنترل مد لغزشی با سطح لغزشی که شامل پارامترهای تطبیق‌پذیر است، برای همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری استفاده شده است. در [۱۸] نیز از کنترل مد لغزشی برای همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری استفاده شده است. عدم قطعیت‌های پارامتری در هر لحظه به شیوه‌ای تطبیقی تخمین زده می‌شوند. در [۱۹] از کنترل عصبی فازی نوع دو برای تخمین دینامیک نامعلوم سیستم آشوبناک مرتبه کسری استفاده شده است. همچنین، کنترل پیش‌بین مقاوم برای تحقق مسئله همزمان‌سازی در حضور اشباع محرک و تاخیر زمانی طراحی شده است. در [۲۰] از کنترل عصبی تطبیقی برای کنترل موتور مغناطیس دائم آشوبناک مرتبه کسری در حضور عدم قطعیت پارامتری و اغتشاشات خارجی استفاده شده است. همچنین، از یک رویکرد حالت مرتبه کاهش یافته برای تخمین حالت‌های غیرقابل اندازه‌گیری استفاده شده است. همچنین، رویکردی برای کاهش اثرات فیلترینگ در زمان محدود توسعه یافته است.

عموم رویکردهای کنترل تطبیقی همچون کنترل پسگام که در ادبیات موضوع به آن‌ها اشاره شد، قادر به حفظ عملکرد سیستم حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری هستند. به علاوه، در الگوریتم‌های مبتنی بر کنترل مد لغزشی نیاز به آگاهی از کران بالای عدم قطعیت و اثرات غیرخطی سیستم است که در اختیار داشتن چنین دانشی به‌ویژه برای سیستم‌های آشوبناک با دینامیک پیچیده دشوار است. از طرف دیگر، رویکردهایی که از تخمین کران بالای نامعینی استفاده می‌کنند، با افت عملکرد در شرایط پایا، پیچیدگی طراحی و دشواری تحلیل پایداری حلقه بسته همراه هستند. بر این اساس، در این مقاله، رویکرد کنترل مد لغزشی با قانون تطبیق غیرخطی مبتنی بر تئوری پایداری لیاپانوف تلفیق شده است، به طوری که اثرات غیرخطی و نامعینی‌های سیستم آشوبناک برای هر دو مسئله پایداری و همزمان‌سازی به‌طور لحظه‌ای تخمین زده می‌شوند و قوانین کنترلی بر اساس نتایج تخمین به‌روز می‌شوند. بنابراین، مهم‌ترین نوآوری رویکرد کنترلی پیشنهادی قابلیت تخمین همزمان اثرات عدم قطعیت پارامتری و غیر پارامتری در دینامیک یک سیستم مرتبه کسری آشوبناک همراه با تضمین پایداری و حفظ عملکرد کنترلی سیستم حلقه بسته در شرایط مطلوب است.

در این مقاله، از کنترل مد لغزشی مرتبه کسری مبتنی بر شرط دسترسی نمایی و قانون تطبیق غیرخطی برای تحقق پایداری و همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری لورنز و لو استفاده می‌شود. اساس این روش بر تفکیک دینامیک سیستم به دو بخش

خطی و غیرخطی است، سپس، کنترل مد لغزشی برای بخش خطی توسعه یافته و قانون کنترل تطبیقی مبتنی بر تخمین غیرخطی با هدف جبران سازی اثرات بخش غیرخطی طراحی می شود. بر این اساس، رویکرد پیشنهادی برای کلاسی از سیستم های غیرخطی که قابل تفکیک به دو بخش خطی و غیرخطی باشند، قابل توسعه است و برای سیستم های با تاخیر در ورودی یا خروجی معتبر نیست. الگوریتم پیشنهادی به خوبی قادر به تخمین بخش غیرخطی دینامیک سیستم بوده، از سهولت طراحی برخوردار است، پایداری حلقه بسته را به کمک تئوری لیاپانوف تضمین می کند و حساسیت پایینی نسبت به عدم قطعیت های غیرساختاریافته دارد.

ساختار کلی مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم، اشاره ای بر محاسبات مرتبه کسری می شود. مدل آشوبناک مرتبه کسری لورنز و چن در بخش سوم معرفی می شوند. قانون کنترل مد لغزشی مرتبه کسری مبتنی بر قانون تطبیق غیرخطی در بخش چهارم تشریح می شود. شبیه سازی ها و تحلیل نتایج در بخش پنجم و نتیجه گیری نیز در بخش ششم ارائه می شود.

## ۲- حساب مرتبه کسری

برای هر تابع  $f(z)$  با متغیر  $z = x + iy$  و عدد  $\alpha$  (کسری، گنگ یا مختلط)، تابع متناظر  $g(z) = D_c^\alpha f(z)$  وجود دارد، به طوری که [۲۱]

- اگر  $f(z)$  تابعی تحلیلی از متغیر  $z$  باشد، تابع مشتق  $g(z) = D_c^\alpha f(z)$  نیز تابعی تحلیلی از  $z$  و  $\alpha$  باشد.
- محاسبه  $D_c^\alpha$  و مشتق معمول از مرتبه  $n \in R^+$  به ازای  $\alpha = n$  دارای نتایج مشابهی باشند.
- محاسبه  $D_c^\alpha$  و انتگرال  $n$  گانه با  $n \in R^-$  به ازای  $\alpha = -n$  دارای نتایج مشابهی باشند.
- $D_c^\alpha f(z)$  و مشتقات از مرتبه  $(n-1)$  اول آن بایستی در  $z = c$  صفر باشند.
- عملگر با مرتبه  $\alpha = 0$ ، معرف عملکرد واحد است.
- عملگر بایستی خطی باشد. بدین معنی که

$$D_c^\alpha [af(z) + bh(z)] = aD_c^\alpha f(z) + bD_c^\alpha h(z) \quad (۱)$$

- برای انتگرال های مرتبه کسری با مرتبه دلخواه که  $R(\alpha) > 0, R(\beta) > 0$ ، قانون نمایی (۲) برقرار است:

$$D_c^\alpha D_c^\beta f(z) = D_c^{\alpha+\beta} f(z) \quad (۲)$$

## ۲-۱- انتگرال مرتبه کسری

متناظر با مفهوم انتگرال گیری ریمن لیوویل<sup>۱</sup>، انتگرال مرتبه کسری با مرتبه  $R(\alpha) > 0$  دنباله ای طبیعی از فرمول کوشی<sup>۲</sup> برای انتگرال های تکراری است که در آن، محاسبات مربوط به انتگرال  $n$  گانه برای تابع  $f(t)$  به یک کانولوشن ساده تبدیل می شود. این فرمول را می توان به صورت (۳) بیان نمود [۲۱]:

$$I_c^\alpha f(t) \triangleq D_c^{-n} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > c, \quad n \in Z^+ \quad (۳)$$

<sup>۱</sup> Riemann-Liouville

<sup>۲</sup> Cauchy

بر مبنای رابطه فوق می توان مشاهده نمود که  $I_c^\alpha f(t)$  و مشتقات آن از مرتبه های ۱، ۲ تا  $(n-1)$  در  $(t=c)$  برابر صفر می شوند. با در نظر گرفتن  $\Gamma(n) = (n-1)!$  به عنوان تابع گاما و معرفی عدد حقیقی و مثبت  $\alpha$ ، انتگرال مرتبه کسری ریمن لیوویل به صورت (۴) تعریف می شود:

$$I_c^\alpha f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > c, \alpha \in Z^+ \quad (4)$$

ثابت می شود که انتگرال فوق تمامی شرایط مربوط به یک انتگرال مرتبه کسری را بر آورده می سازد. زمانی که با یک سیستم دینامیکی سروکار داریم، معمول است که تابع  $f(t)$  تابعی سببی<sup>۱</sup> از متغیر  $t$  است، و بر این اساس، انتگرال مرتبه کسری تابع  $f(t)$  به صورت زیر تعریف می شود [۲۱]:

$$I^\alpha f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0, \alpha \in R^+ \quad (5)$$

## ۲-۲- مشتق مرتبه کسری

رابطه ارائه شده در (۵) را نمی توان برای مشتق مرتبه کسری با جایگذاری مستقیم  $-\alpha$  در عوض  $\alpha$  مورد استفاده قرار داد. زیرا باید عملگرها به گونه ای تعیین شوند که همگرایی انتگرال های تعریف شده حفظ شده و همچنین، ویژگی های مشتق معمولی از مرتبه صحیح نیز باید حفظ شود. با در نظر گرفتن  $D^n$  به عنوان عملگر مشتق از مرتبه  $n$  و  $I$  به عنوان عملگر واحد، می توان نوشت [۲۱]:

$$D^n I^n = I, I^n D^n \neq I, n \in N \quad (6)$$

به عبارت دیگر، عملگر  $D^n$  معرف وارون چپ عملگر  $I^n$  است. با توجه به رابطه (۳)، می توان نوشت:

$$I^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, t > 0 \quad (7)$$

که در آن،  $f^{(k)}(\cdot)$  مشتق مرتبه  $k$  تابع  $f(\cdot)$  است. برای بررسی اینکه  $D^\alpha$  وارون چپ  $I^\alpha$  می باشد یا نه، عدد صحیح مثبت  $m$  معرفی می شود به طوری که  $m-1 < \alpha < m$  برقرار است. بر این اساس، مشتق مرتبه کسری بر مبنای تعریف ریمن لیوویل از مرتبه  $\alpha \in R^+$  به فرم (۸) خواهد بود:

$${}_R D^\alpha f(t) \triangleq D^m I^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right] \quad (8)$$

تعریف دیگری که برای مشتق مرتبه کسری توسط کاپوتو<sup>۲</sup> پیشنهاد شده است، به فرم (۹) است [۲۱]:

$${}_C D^\alpha f(t) \triangleq I^{m-\alpha} D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (9)$$

<sup>۱</sup> causal

<sup>۲</sup> Caputo

تعریف ارائه شده در (۹) نسبت به تعریف (۸) محدود کننده تر است، زیرا نیاز به انتگرال گیری از مشتق مرتبه  $m$  تابع  $f(t)$  دارد. واضح است که در حالت کلی می توان نوشت:

$${}_R D^\alpha f(t) \triangleq D^m \ell^{m-\alpha} f(t) \neq \ell^{m-\alpha} D^m f(t) \triangleq {}_C D^\alpha f(t) \quad (10)$$

بین دو تعریف ارائه شده برای مشتق مرتبه کسری، رابطه زیر برقرار است:

$${}_R D^\alpha f(t) = {}_C D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (11)$$

$${}_R D^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) = {}_C D^\alpha f(t) \quad (12)$$

### ۳- سیستم های آشوبناک مرتبه کسری لورنز و چن

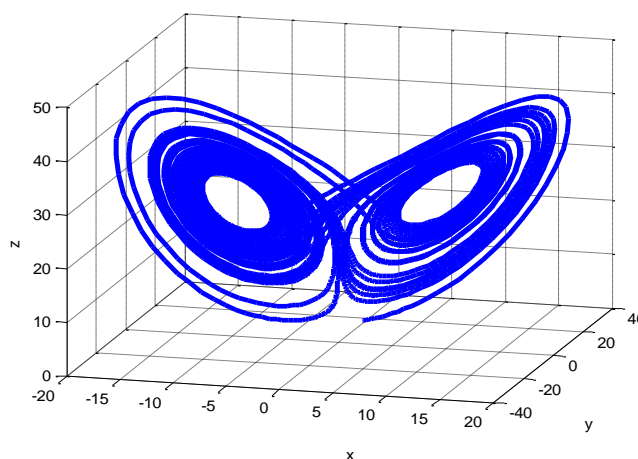
سیستم آشوبناک لورنز معروف یک دینامیک از مرتبه ۳ است که برای نخستین بار توسط لورنز ادوارد بر مبنای معادلات ساده شده از جریان همرفتی ناشی از معادلات جو در سال ۱۹۶۳ ارائه گردید. سیستم مرتبه کسری لورنز به صورت (۱۳) تعریف می شود [۲۲]:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x(t) &= a_1 (y(t) - x(t)) \\ D^{\alpha_2} y(t) &= x(t)(b_1 - z(t)) - y(t) \\ D^{\alpha_3} z(t) &= x(t)y(t) - c_1 z(t) \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن،  $\alpha_1$ ،  $\alpha_2$  و  $\alpha_3$  مرتبه های کسری مشتقات رابطه فوق هستند. پارامترهای مدل آشوبناک مرتبه کسری لورنز برابر با  $a_1 = 10$ ،  $b_1 = 28$  و  $c_1 = 8/3$  و شرط آشوبناک بودن آن در شرایط مرتبه کسری این است که  $\alpha_i > 0.9941$ ،  $i = 1, 2, 3$  باشد. در شکل ۱، رفتار آشوبناک سیستم مرتبه کسری لورنز در فضای سه بعدی به ازای  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.995$  مشاهده می شود.

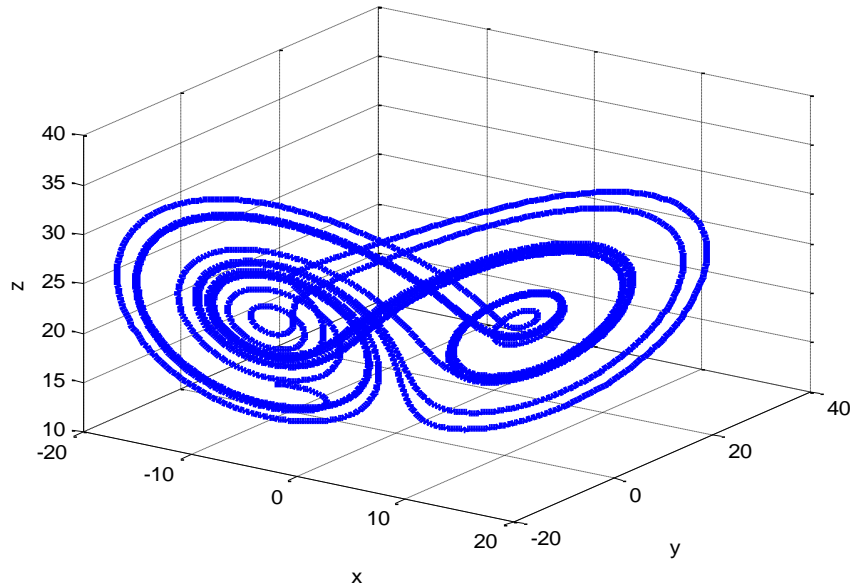
مدل مرتبه کسری سیستم آشوبناک چن به صورت (۱۴) قابل بیان است [۲۳]:

$$\begin{aligned} D^{\beta_1} x(t) &= a_2 (y(t) - x(t)) \\ D^{\beta_2} y(t) &= (c_2 - a_2)x(t) - x(t)z(t) + c_2 y(t) \\ D^{\beta_3} z(t) &= x(t)y(t) - b_2 z(t) \end{aligned} \quad (14)$$



شکل ۱. رفتار آشوبناک سیستم مرتبه کسری لورنز

که در آن، شرط وجود آشوب در شرایط مرتبه کسری این است که  $\beta_{1,2,3} > 0.88$  باشد. در شکل ۲، رفتار آشوبناک سیستم مرتبه کسری چن در فضای سه‌بعدی و دویعدی به ازای  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.9$  و شرایط اولیه  $X(0) = [-9 \quad -5 \quad 14]$  مشاهده می‌شود.



شکل ۲. رفتار آشوبناک سیستم مرتبه کسری چن

## ۴- طراحی قانون کنترل مد لغزشی مبتنی بر قانون تطبیق غیرخطی

به منظور تحقق قانون کنترل، نخست باید مشتقات مرتبه کسری مربوط به دینامیک سیستم آشوبناک لورنز و چن محاسبه شوند.

برای این منظور، فرض کنید که معادلات دیفرانسیلی (۱۵) در دسترس باشد:

$$D_t^\alpha y(t) = \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = f(t, y(t)), \quad (15)$$

$$0 \leq t \leq T, y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (m = \lceil \alpha \rceil)$$

رابطه فوق با معادله انتگرالی ولترا معادل است [۲۴]:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s, y(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \quad (16)$$

که در آن  $\Gamma(\alpha)$  معروف به تابع گاما می‌باشد و از رابطه (۱۷) تبعیت می‌کند:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (17)$$

لازم به ذکر است که تابع گاما در (۱۷) معادل رابطه تابع گاما در (۴) است با این تفاوت ظاهری که برای عدد صحیح

است و دومی برای عدد کسری بین صفر و یک است. به عبارت دیگر، تابع گاما در (۱۷) برای اعداد صحیح معادل (۴) است. با تنظیم

$t_n = nh$  و  $h = T/n$  برای  $n = 0, 1, 2, \dots, T$ ، رابطه (۱۶) به صورت (۱۸) خلاصه می‌شود [۲۴]:

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Delta(\alpha+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)) \quad (18)$$



در رابطه (۱۸)، مقدار پیش‌بینی  $y_h^p(t_{n+1})$  به صورت (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{t^{k+1}}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)) \quad (19)$$

که در آن

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1 \end{cases} \quad (20)$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} \left( (n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha \right)$$

حال، معادلات یک سیستم مرتبه کسری را به صورت (۲۱) در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha_1} x}{dt^{\alpha_1}} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{d^{\alpha_2} y}{dt^{\alpha_2}} &= f_2(x, y, z) \\ \frac{d^{\alpha_3} z}{dt^{\alpha_3}} &= f_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن  $0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, 3$  می‌باشد. بر مبنای روابط فوق، مدل ارائه شده در (۲۱) را می‌توان به صورت (۲۲) بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_0 + \frac{h^{\alpha_1}}{\Delta(\alpha_1 + 2)} \left[ f_1(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \gamma_{1,j,n+1} f_1(x_j, y_j, z_j) \right] \\ y_{n+1} &= y_0 + \frac{h^{\alpha_2}}{\Delta(\alpha_2 + 2)} \left[ f_2(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \gamma_{2,j,n+1} f_2(x_j, y_j, z_j) \right] \\ z_{n+1} &= z_0 + \frac{h^{\alpha_3}}{\Delta(\alpha_3 + 2)} \left[ f_3(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \gamma_{3,j,n+1} f_3(x_j, y_j, z_j) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن

$$\begin{aligned} x_{n+1}^p &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \sum_{j=0}^n \xi_{1,j,n+1} f_1(x_j, y_j, z_j) \\ y_{n+1}^p &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \sum_{j=0}^n \xi_{2,j,n+1} f_2(x_j, y_j, z_j) \\ z_{n+1}^p &= z_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_3)} \sum_{j=0}^n \xi_{3,j,n+1} f_3(x_j, y_j, z_j) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\gamma_{i,j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha_i+1} - (n-\alpha_i)(n+1)^{\alpha_i}, & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha_i+1} + (n-j)^{\alpha_i+1} - 2(n-j+1)^{\alpha_i+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1 \end{cases} \quad (24)$$

$$\xi_{i,j,n+1} = \frac{h^{\alpha_i}}{\alpha_i} \left( (n-j+1)^{\alpha_i} - (n-j)^{\alpha_i} \right)$$

بر مبنای روابط فوق، سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز به صورت (۲۵) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
 x_m(k+1) &= x_m(0) + \frac{h^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+2)} \left[ a_1 (y_m^p(k+1) - x_m^p(k+1)) \right] + \frac{h^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+2)} \sum_{j=0}^k \gamma_{1,j,n+1} (a_1 (y_m(j) - x_m(j))) \\
 y_m(k+1) &= y_m(0) + \frac{h^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+2)} \left[ x_m^p(k+1) (b_1 - z_m^p(k+1)) - y_m^p(k+1) \right] \\
 &\quad + \frac{h^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+2)} \sum_{j=0}^k \gamma_{2,j,n+1} (x_m(j) (b_1 - z_m(j)) - y_m(j)) \\
 z_m(k+1) &= z_m(0) + \frac{h^{\alpha_3}}{\Gamma(\alpha_3+2)} \left[ x_m^p(k+1) y_m^p(k+1) - c_1 z_m^p(k+1) \right] \\
 &\quad + \frac{h^{\alpha_3}}{\Gamma(\alpha_3+2)} \sum_{j=0}^k \gamma_{3,j,n+1} (x_m(j) y_m(j) - c_1 z_m(j))
 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 x_m^p(k+1) &= x_m(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \sum_{j=0}^k \xi_{1,j,n+1} (a_1 (y_m(j) - x_m(j))) \\
 y_m^p(k+1) &= y_m(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \sum_{j=0}^k \xi_{2,j,n+1} (x_m(j) (b_1 - z_m(j)) - y_m(j)) \\
 z_m^p(k+1) &= z_m(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_3)} \sum_{j=0}^k \xi_{3,j,n+1} (x_m(j) y_m(j) - c_1 z_m(j))
 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

به همین ترتیب برای سیستم آشوبناک مرتبه کسری چن داریم:

$$\begin{aligned}
 x_s(k+1) &= x_s(0) + \frac{h^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+2)} \left[ a_2 (y_s^p(k+1) - x_s^p(k+1)) + u_1(k) \right] \\
 &\quad + \frac{h^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+2)} \sum_{j=0}^k \gamma_{1,j,n+1} (a_2 (y_s(j) - x_s(j)) + u_1(j)) \\
 y_s(k+1) &= y_s(0) + \frac{h^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+2)} \left[ (c_2 - a_2) x_s^p(k+1) - x_s^p(k+1) z_s^p(k+1) + c_2 y_s^p(k+1) + u_2(k) \right] \\
 &\quad + \frac{h^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+2)} \sum_{j=0}^k \gamma_{2,j,n+1} ((c_2 - a_2) x_s(j) - x_s(j) z_s(j) + c_2 y_s(j) + u_2(j)) \\
 z_s(k+1) &= z_s(0) + \frac{h^{\beta_3}}{\Gamma(\beta_3+2)} \left[ x_s^p(k+1) y_s^p(k+1) - b_2 z_s^p(k+1) + u_3(k) \right] \\
 &\quad + \frac{h^{\beta_3}}{\Gamma(\beta_3+2)} \sum_{j=0}^k x_s(j) y_s(j) - b_2 z_s(j) + u_3(j)
 \end{aligned} \tag{۲۷}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 x_s^p(k+1) &= x_s(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta_1)} \sum_{j=0}^k \xi_{1,j,n+1} (a_2 (y_s(j) - x_s(j)) + u_1(j)) \\
 y_s^p(k+1) &= y_s(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta_2)} \sum_{j=0}^k \xi_{2,j,n+1} ((c_2 - a_2) x_s(j) - x_s(j) z_s(j) + c_2 y_s(j) + u_2(j)) \\
 z_s^p(k+1) &= z_s(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta_3)} \sum_{j=0}^k \xi_{3,j,n+1} (x_s(j) y_s(j) - b_2 z_s(j) + u_3(j))
 \end{aligned} \tag{۲۸}$$

لازم به ذکر است که الگوریتم پیشنهادی برای کلاسی از سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری که قابل تفکیک به دو بخش خطی و غیرخطی با وجود عدم قطعیت و اغتشاشات خارجی باشند، معتبر است. همچنین، رویکرد پیشنهادی برای سیستم‌های آشوبناک تاخیردار قابل توسعه نیست و فرض می‌شود که مرتبه کسری از قبل معلوم است.

در ادامه، مسئله پایدارسازی سیستم آشوبناک لورنز و همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز و چن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

#### ۴-۱- پایدارسازی سیستم آشوبناک لورنز

در ادامه فرض کنید که سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز دارای عدم قطعیت غیرساختاریافته در بخش غیرخطی خود می‌باشد. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x(t) &= a_1 (y(t) - x(t)) + u_1(t) + d_1(t) \\ D^{\alpha_2} y(t) &= x(t)(b_1 - z(t)) - y(t) + u_2(t) + d_2(t) \\ D^{\alpha_3} z(t) &= x(t)y(t) - c_1 z(t) + u_3(t) + d_3(t) \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن،  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  مرتبه‌های کسری مشتقات رابطه (۲۹) هستند. در (۲۹)،  $d = (d_1, d_2, d_3)$  بردار عدم قطعیت غیرساختاریافته بوده و اطلاعاتی دقیقی از آن در دسترس نیست. رابطه (۲۹) را می‌توان به دو بخش خطی و غیرخطی به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} D^{\alpha_1} x(t) \\ D^{\alpha_2} y(t) \\ D^{\alpha_3} z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 \\ b_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x(t)z(t) \\ x(t)y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

با تعریف متغیرهای زیر

$$\begin{aligned} D^{\alpha} X &= \begin{bmatrix} D^{\alpha_1} x(t) \\ D^{\alpha_2} y(t) \\ D^{\alpha_3} z(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 \\ b_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ f &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x(t)z(t) \\ x(t)y(t) \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \end{aligned}$$

رابطه (۳۰) به صورت (۳۱) خلاصه می‌شود:

$$D^{\alpha} X = AX + U + f + d \quad (31)$$

فرض می‌شود که کران بالای عدم قطعیت را نمی‌توان لزوماً به طور دقیق مشخص کرد. بر این اساس، هدف اصلی تخمین لحظه‌ای بردار بخش غیرخطی شامل عدم قطعیت مدل لورنز به کمک قانون تطبیق غیرخطی است. برای این منظور، فرض می‌شود که بردار بخش غیرخطی و شامل عدم قطعیت را می‌توان به صورت رابطه (۳۲) توصیف کرد:

$$f(x) + d(t) = \theta^T X \quad (32)$$

که در آن،  $\Theta \in R^{3 \times 3}$  ماتریس پارامتر تطبیق است. ماتریس مذکور متشکل از سه بردار  $\theta_i \in R^{3 \times 1}$  است. در این صورت، قانون کنترل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(t) = U_s(t) + U_{ad}(t) \quad (33)$$

که در آن،  $U_{ad}$  معرف قانون کنترل تطبیقی است و به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$U_{ad}(t) = -\hat{\Theta}^T X \quad (34)$$

که در آن،  $\hat{\Theta}$  تخمین ماتریس معلوم  $\Theta$  است. بعلاوه،  $U_s$  نیز قانون کنترل مد لغزشی است که بر اساس تحقق شرط دسترسی تعیین می‌شود.

با جایگذاری (۳۳) در (۳۱) داریم:

$$D^\alpha X = AX + U_s(t) - \hat{\Theta}^T X + f + d \quad (35)$$

بر اساس رابطه (۳۲) می‌توان نوشت:

$$D^\alpha X = AX + U_s(t) - \hat{\Theta}^T X + \Theta^T X \quad (36)$$

به عبارت دیگر

$$D^\alpha X = AX + U_s(t) - \tilde{\Theta}^T X \quad (37)$$

که در آن،  $\tilde{\Theta} \in R^{3 \times 3}$  ماتریس خطای تخمین است. سطح لغزش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s = D^{\alpha-1} X + \lambda D^{-1} X \quad (38)$$

که در آن،  $\lambda$  پارامتر مثبت و معرف مؤلفه وزنی سطح لغزشی است. قانون کنترل مد لغزشی بر اساس مدل نامی سیستم طراحی می‌شود و با فرض اینکه ماتریس خطای تخمین به صورت مجانبی به مبدأ همگرا می‌شود، می‌توان نوشت:

$$\dot{s}(t) = AX + U_s + \lambda X \quad (39)$$

شرط دسترسی نمایی (۴۰) را در نظر بگیرید:

$$\dot{s}(t) \leq -\eta_1 s(t) - \eta_2 \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (40)$$

که در آن،  $\eta_1$  و  $\eta_2$  به ترتیب معرف بهره لغزشی و کلیدزنی هستند. در این صورت، بر اساس شرط دسترسی (۴۰)، قانون کنترل مد لغزشی به صورت (۴۱) توصیف می‌شود:

$$AX + U_s + \lambda X \leq -\eta_1 s(t) - \eta_2 \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (41)$$

به عبارت دیگر

$$U_s = -AX - \lambda X - \eta_1 s(t) - \eta_2 \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (42)$$

برای تضمین همگرایی مجانبی ماتریس خطای تخمین به مبدأ، تابع لیاپانوف (۴۳) را در نظر بگیرید:

$$v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i s_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 r_i \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i \quad (43)$$

که در آن،  $q_i, 1, 2, 3$  و  $r_i, 1, 2, 3$  مؤلفه‌های طراحی مثبت هستند. با مشتق‌گیری از رابطه (۴۳) داریم:

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^3 q_i s_i(t) \dot{s}_i(t) + \sum_{i=1}^3 r_i \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i \quad (44)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۳۷) و با توجه به رابطه (۳۹) می‌توان نوشت:

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^3 q_i s_i(t) (a_i^T X + u_{si} + \mu_i x_i - \tilde{\theta}_i^T X) + \sum_{i=1}^3 r_i \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i \quad (45)$$

که در آن

$$a_i = A(i,:), \lambda = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}, \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases}$$

از طرفی، با توجه به رابطه (۴۲) داریم:

$$u_{si} = -a_i^T X - \mu_i x_i - \eta_1 s_i(t) - \eta_2 \operatorname{sgn}(s_i(t)) \quad (46)$$

در این صورت، مشتق زمانی تابع لیاپانوف به صورت (۴۷) خلاصه می‌شود:

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^3 q_i s_i(t) (-\eta_1 s_i(t) - \eta_2 \operatorname{sgn}(s_i(t))) - \tilde{\theta}_i^T X + \sum_{i=1}^3 r_i \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i \quad (47)$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت تفکیک شده (۴۸) نوشت:

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^3 q_i s_i(t) (-\eta_1 s_i(t) - \eta_2 \operatorname{sgn}(s_i(t))) + \sum_{i=1}^3 r_i \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i - q_i s_i \tilde{\theta}_i^T X \quad (48)$$

با توجه به رابطه زیر

$$\sum_{i=1}^3 r_i \tilde{\theta}_i^T \dot{\tilde{\theta}}_i - q_i s_i \tilde{\theta}_i^T X = 0 \quad (49)$$

مشتق زمانی تابع لیاپانوف به صورت (۵۰) خلاصه می‌شود:

$$\dot{v} = -\sum_{i=1}^3 (\eta_i k_i s_i^2(t) + q_i \eta_2 s_i(t) \operatorname{sgn}(s_i(t))) \leq 0 \quad (50)$$

رابطه (۴۹) را می‌توان به صورت (۵۱) بازنویسی کرد:

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{\theta}_i^T (r_i \dot{\tilde{\theta}}_i - q_i s_i(t) X) = 0 \quad (51)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$r_i \dot{\hat{\theta}}_i - q_i s_i X = 0 \quad (52)$$

با توجه به اینکه  $\dot{\hat{\theta}} = \hat{\theta}$  است، قانون تطبیق غیرخطی برابر است با

$$\hat{\theta}_i = \frac{q_i}{r_i} s_i X \quad (53)$$

و در فرم ماتریسی داریم:

$$\dot{\hat{\Theta}} = \zeta QR^{-1} X s^T \quad (54)$$

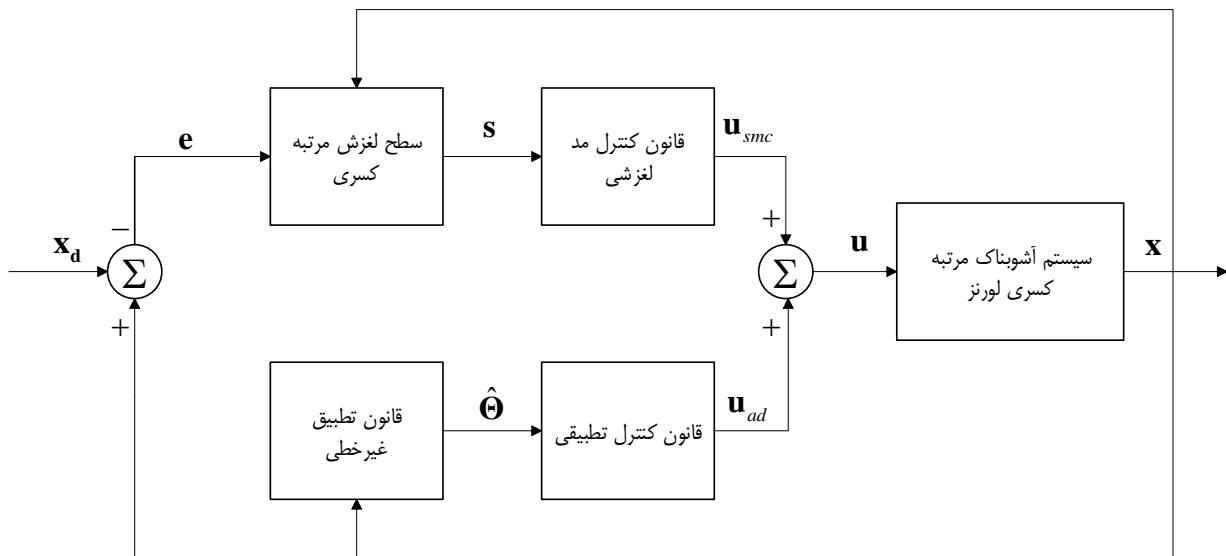
که در آن،

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

همچنین،  $\zeta$  پارامتر مثبت و معرف نرخ همگرایی قانون تطبیق (۵۴) است. در این صورت، قانون کنترل نهایی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases} U(t) = -AX - \lambda X - \eta_1 s(t) - \eta_2 \operatorname{sgn}(s(t)) - \hat{\Theta}^T X \\ \dot{\hat{\Theta}} = \zeta QR^{-1} X s^T \end{cases} \quad (55)$$

بلوک دیاگرام کنترل پیشنهادی برای پایدارسازی سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز در شکل ۳ ارائه شده است.



شکل ۳. بلوک دیاگرام کنترل مد لغزشی مرتبه کسری تطبیقی پیشنهادی برای پایدارسازی سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز

#### ۴-۲- همزمان‌سازی سیستم‌های لورنز و چن

برای دستیابی به مسئله همزمان‌سازی در حضور عدم قطعیت، نخست دینامیک سیستم لورنز به عنوان رهبر و دینامیک سیستم چن به عنوان پیرو در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر سیستم مرتبه کسری لورنز به صورت (۵۷) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x(t) &= a_1 (y(t) - x(t)) + u_1(t) \\ D^{\alpha_2} y(t) &= x(t)(b_1 - z(t)) - y(t) + u_2(t) \\ D^{\alpha_3} z(t) &= x(t)y(t) - c_1 z(t) + u_3(t) \end{aligned} \quad (57)$$

و مدل مرتبه کسری سیستم آشوبناک چن به صورت (۵۸) قابل بیان است:

$$\begin{aligned} D^{\beta_1} x(t) &= a_2 (y(t) - x(t)) \\ D^{\beta_2} y(t) &= (c_2 - a_2)x(t) - x(t)z(t) + c_2 y(t) \\ D^{\beta_3} z(t) &= x(t)y(t) - b_2 z(t) \end{aligned} \quad (58)$$

دینامیک سیستم های لورنز و چن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D^{\alpha} X_L = A_L X_L + U + f_L \\ D^{\beta} X = A_c X + f_c \end{cases} \quad (59)$$

که در آن

$$\begin{aligned} D^{\alpha} X_L &= \begin{bmatrix} D^{\alpha_1} x(t) \\ D^{\alpha_2} y(t) \\ D^{\alpha_3} z(t) \end{bmatrix}, A_L = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 \\ b_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 \end{bmatrix}, X_L = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, f_L = \begin{bmatrix} 0 \\ -x(t)z(t) \\ x(t)y(t) \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \\ D^{\beta} X &= \begin{bmatrix} D^{\beta_1} x(t) \\ D^{\beta_2} y(t) \\ D^{\beta_3} z(t) \end{bmatrix}, A_c = \begin{bmatrix} -a_2 & a_2 & 0 \\ c_2 - a_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 \end{bmatrix}, X_c = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, f_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -x(t)z(t) \\ x(t)y(t) \end{bmatrix}, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta \end{aligned}$$

در این صورت، خطای ردیابی به صورت (۶۰) تعریف می شود:

$$E = X_L - X_c \quad (60)$$

سطح لغزش به صورت (۶۱) تعریف می شود:

$$s = D^{\alpha-1} X_L - D^{\beta-1} X_c + \lambda D^{-1} E \quad (61)$$

شرط دسترسی را به صورت (۶۲) در نظر بگیرید:

$$\dot{s} = -\mu_1 s - \mu_2 \operatorname{sgn}(s) \quad (62)$$

که در آن،  $\mu_1$  و  $\mu_2$  به ترتیب بهره های لغزشی و کلیدزنی هستند. قانون کنترل را نیز به صورت (۶۳) در نظر بگیرید:

$$U = U_s + U_{ad} \quad (63)$$

که در آن

$$U_{ad} = -\Theta^T X_L \quad (64)$$

با تحقق شرط دسترسی، قانون کنترل مد لغزشی نیز به صورت (۶۵) به دست می آید:

$$A_L X_L + U_s - A_c X_c - f_c + \lambda E = -\eta_1 s - \eta_2 \operatorname{sgn}(s) \quad (65)$$

به عبارت دیگر

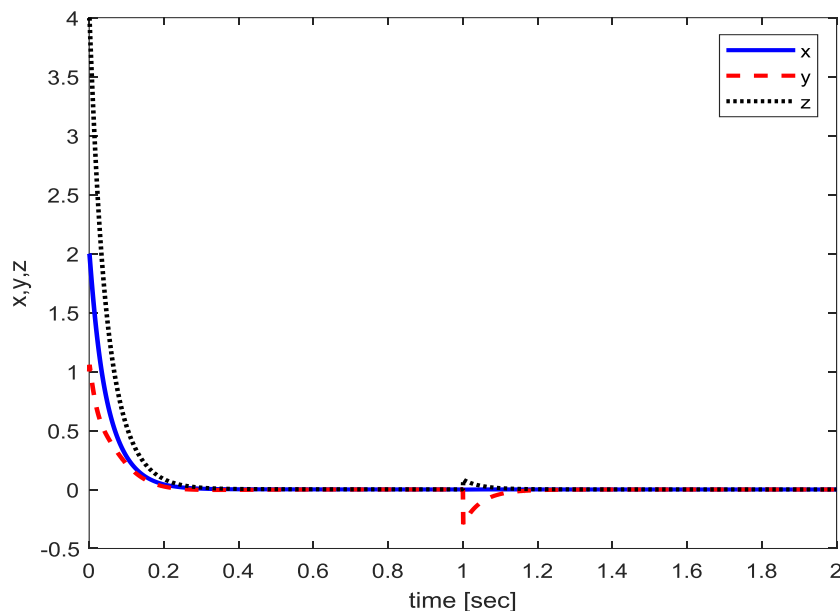
$$U_s = -A_L X_L + A_c X_c + f_c - \lambda E - \eta_1 s - \eta_2 \operatorname{sgn}(s) \quad (66)$$

در نتیجه، قانون کنترل نهایی برابر است با

$$U = -A_L X_L + A_c X_c + f_c - \lambda E - \eta_1 s - \eta_2 \operatorname{sgn}(s) - \Theta^T X_L \quad (67)$$

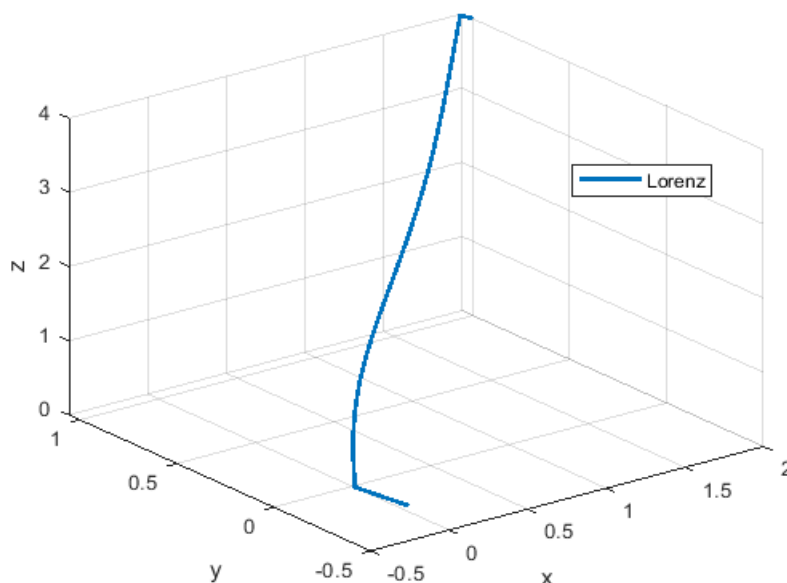
### ۵- نتایج شبیه‌سازی

در ابتدا نتایج پایدارسازی سیستم آشوبناک سیستم مرتبه کسری لورنز ارائه می‌شوند. شرایط اولیه به صورت  $(x(0) \ y(0) \ z(0)) = (2 \ 1 \ 3)$  و  $\hat{\Theta}(0) = 0$  انتخاب شده‌اند. پارامترهای طراحی نیز برابر با  $\eta_1 = 10, \eta_2 = 0.01, \lambda_{1,2,3} = 20, \zeta = 0.02, Q = 20I_{3 \times 3}, R = I_{3 \times 3}$  انتخاب شده‌اند. همچنین، فرض می‌شود که بخش غیرخطی از زمان ۱ ثانیه به بعد به میزان ۵۰ درصد افزایش یافته است. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، هر سه متغیر حالت سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز رفتاری نمایی نزولی یکنواخت به سمت مبدأ دارند و این همگرایی در کمتر از ۲ ثانیه انجام گرفته است. بعلاوه، حساسیت روش پیشنهادی به اثرات عدم قطعیت بسیار کم است، به طوری که می‌توان دریافت که پاسخ‌های حلقه بسته بعد از بروز عدم قطعیت به مقدار کمی منحرف شده و بعد از زمان کوتاهی مجدداً به سمت مبدأ همگرا شده‌اند. رفتار همگرایی متغیرهای حالت از شرایط اولیه به مبدأ در فضای سه‌بعدی را می‌توان در شکل ۵ مشاهده کرد. با توجه به شکل ۶، سیگنال‌های کنترلی تنها در شرایط گذرا از دامنه بالایی برخوردار هستند و با گذشت زمان به صفر همگرا شده‌اند. بعلاوه، در لحظه افزایش ۵۰ درصدی در بخش غیرخطی دینامیک سیستم با کمی تغییرات اما در بازه زمانی کوتاهی کمی تغییر می‌کنند. رفتار پایدار مجانبی سطوح لغزش در شکل ۷ دلالت بر تضمین پایداری سیستم حلقه بسته و صحت طراحی قوانین کنترل مد لغزشی دارد. به عبارت دیگر، سطوح لغزش معرف رویه‌های پایدار بر حسب سیگنال‌های خطا هستند که باید در گذر زمان و به‌طور مجانبی به مبدأ هدایت شوند. این سطوح نیز در لحظه بروز عدم قطعیت در بازه زمانی کوتاهی تغییر محدودی می‌کنند. تخمین بخش غیرخطی شامل عدم قطعیت دینامیک لورنز به کمک قانون تطبیق پیشنهادی در شکل ۸ مشاهده می‌شود.

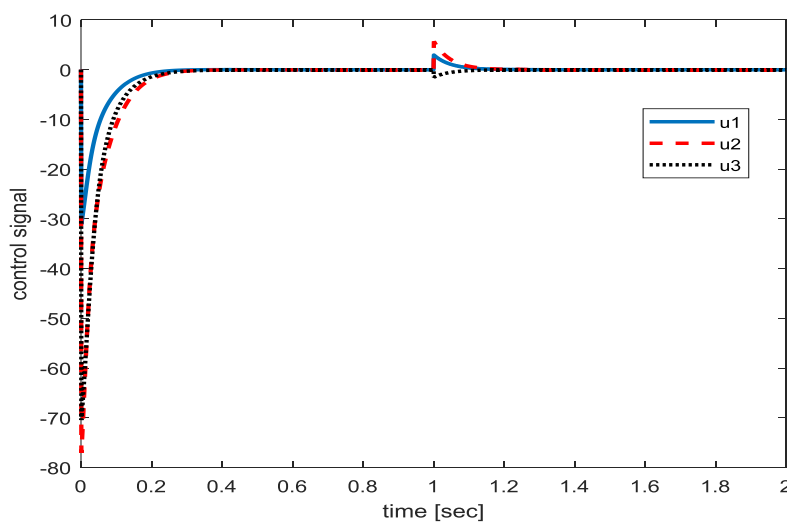


شکل ۴. پایدارسازی متغیرهای حالت سیستم لورنز در حضور عدم قطعیت غیرساختار یافته

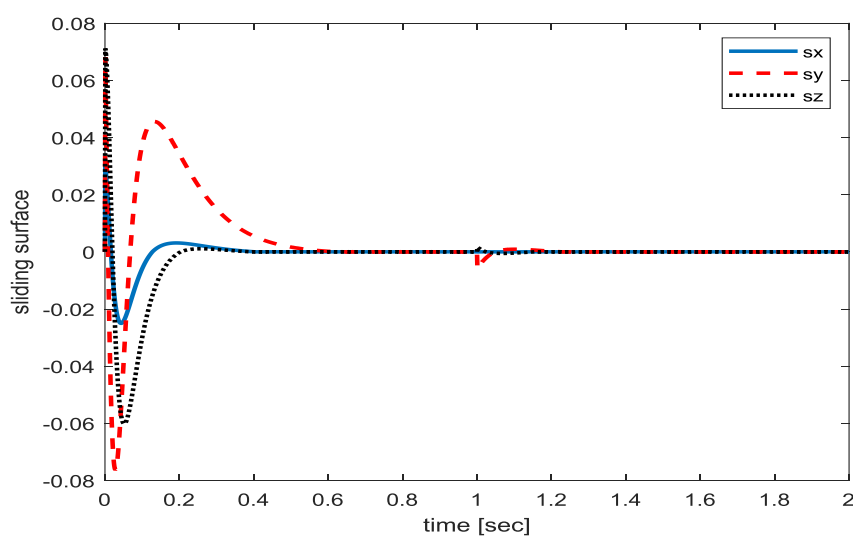




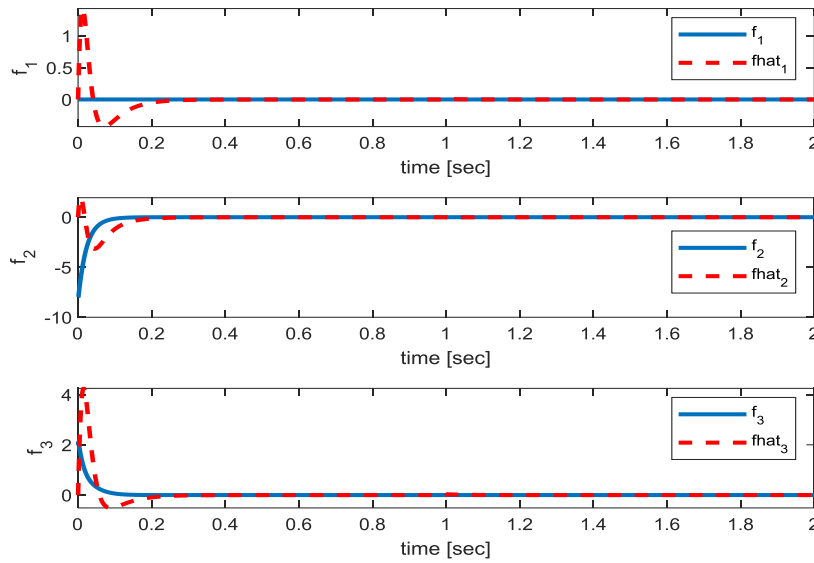
شکل ۵. پایدارسازی سیستم لورنز در فضای سه‌بعدی در حضور عدم قطعیت غیر ساختاریافته



شکل ۶. سیگنال‌های کنترلی پایدارساز در حضور عدم قطعیت غیر ساختاریافته

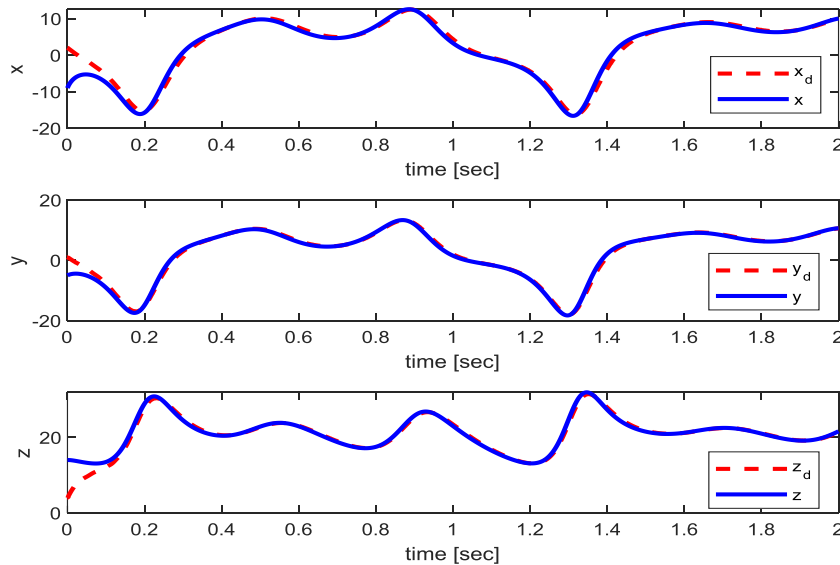


شکل ۷. سطوح لغزش در برنامه پایدارسازی در حضور عدم قطعیت غیر ساختاریافته

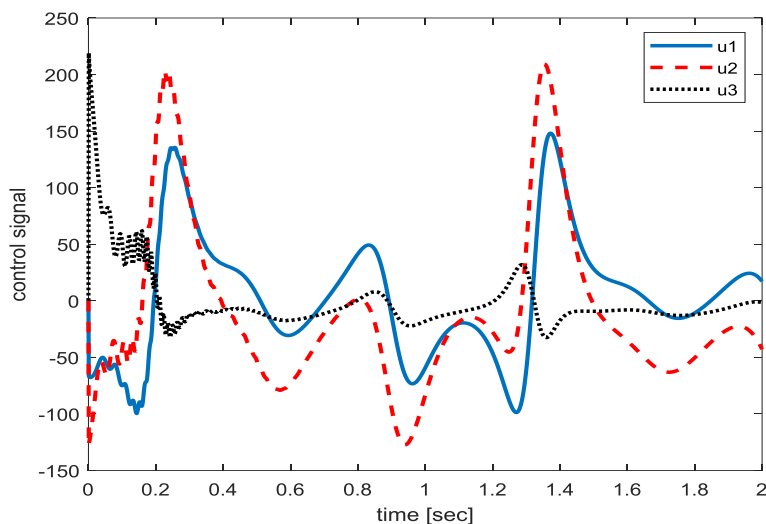


شکل ۸. تخمین مؤلفه‌های بخش غیرخطی دینامیک لورنز به کمک قانون تطبیق غیرخطی

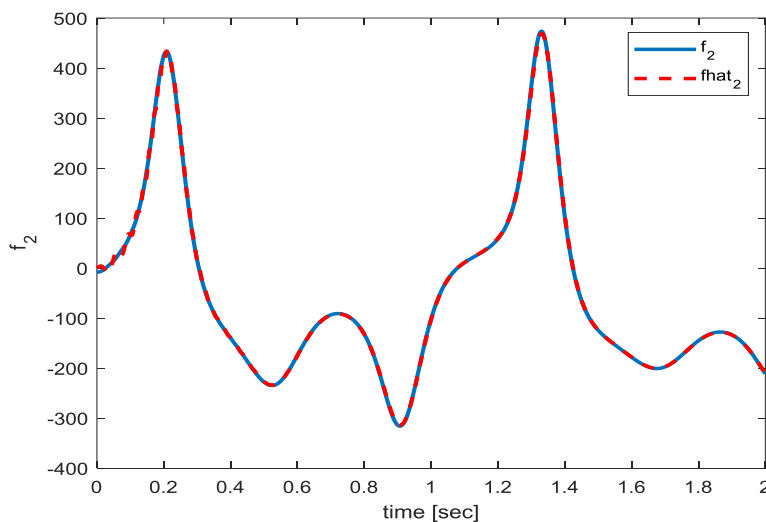
در ادامه نتایج همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز و چن ارائه می‌شود. همان‌طور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، پاسخ‌های حلقه بسته دو سیستم در مدت‌زمان کمتر از ۴۰ میلی‌ثانیه به یکدیگر همگرا شده‌اند و همزمان‌سازی در حضور اثرات غیرخطی سیستم با سرعت عملکرد بالایی انجام گرفته و سرعت گذرا هم نسبتاً خوب است. رفتار همراه با تغییرات سیگنال‌های کنترلی را می‌توان در شکل ۱۰ مشاهده کرد. با توجه به شکل‌های ۱۱ و ۱۲ می‌توان دریافت که قانون تطبیق غیرخطی پیشنهادی با کیفیت عملکرد بالایی قادر به تخمین بخش‌های غیرخطی دینامیک لورنز است.



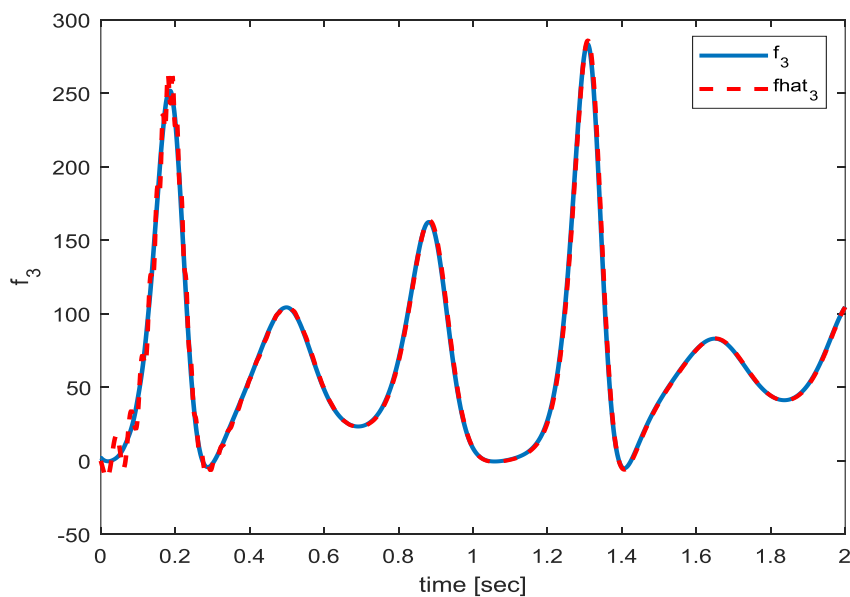
شکل ۹. همزمان‌سازی حالت‌های سیستم‌های آشوبناک لورنز و چن



شکل ۱۰. سیگنال‌های کنترلی دینامیک لورنز در برنامه همزمان‌سازی



شکل ۱۱. تخمین مؤلفه دوم بخش غیرخطی دینامیک لورنز



شکل ۱۲. تخمین مؤلفه سوم بخش غیرخطی دینامیک لورنز

در انتها عملکرد الگوریتم پیشنهادی با یکی از جدیدترین الگوریتم‌های کنترلی توسعه‌یافته برای همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری نامعین مقایسه می‌شود. در این راستا، رویکرد کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی (ATSMC)<sup>۱</sup> که در [۲۵] ارائه شده، در نظر گرفته شده است. در این روش، قوانین کنترلی از رابطه (۶۸) تبعیت می‌کنند:

$$u_i(t) = g_i(Y, t) - f_i(X, t) + D^{\alpha-1} \left( k_i e_i + k_i \operatorname{sgn}(e_i) |e_i|^\mu \right) + L_i S_i + M_i |S_i|^\delta \operatorname{sgn}(S_i) + \hat{\phi}_i |S_i|, \quad i = 1, 2, 3 \quad (68)$$

که در آن،  $\hat{\phi}_i$  از قانون تطبیق زیر بروز می‌شود:

$$\dot{\hat{\phi}}_i = \rho^{-1} |S_i| \quad (69)$$

در رابطه (۶۸)،  $f_i$  و  $g_i$  بخش‌های معین دینامیک سیستم‌های آشوبناک لورنز و چن هستند. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} f_1 = a_1(y(t) - x(t)) \\ f_2 = x(t)(b_1 - z(t)) - y(t) \\ f_3 = x(t)y(t) - c_1 z(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} g_1 = a_2(y(t) - x(t)) \\ g_2 = (c_2 - a_2)x(t) - x(t)z(t) + c_2 y(t) \\ g_3 = x(t)y(t) - b_2 z(t) \end{cases} \quad (70)$$

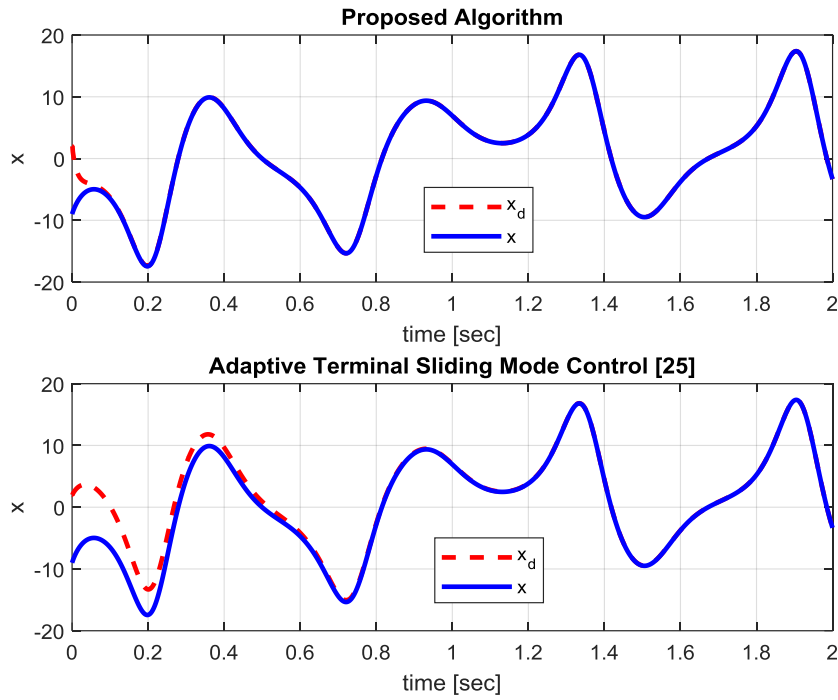
سیگنال‌های خطا از رابطه (۶۰) تبعیت می‌کنند و سطوح لغزش به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$S_i = D^{\alpha-1} e_i + D^{\alpha-2} \left( k_i e_i + k_i \operatorname{sgn}(e_i) |e_i|^\mu \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (71)$$

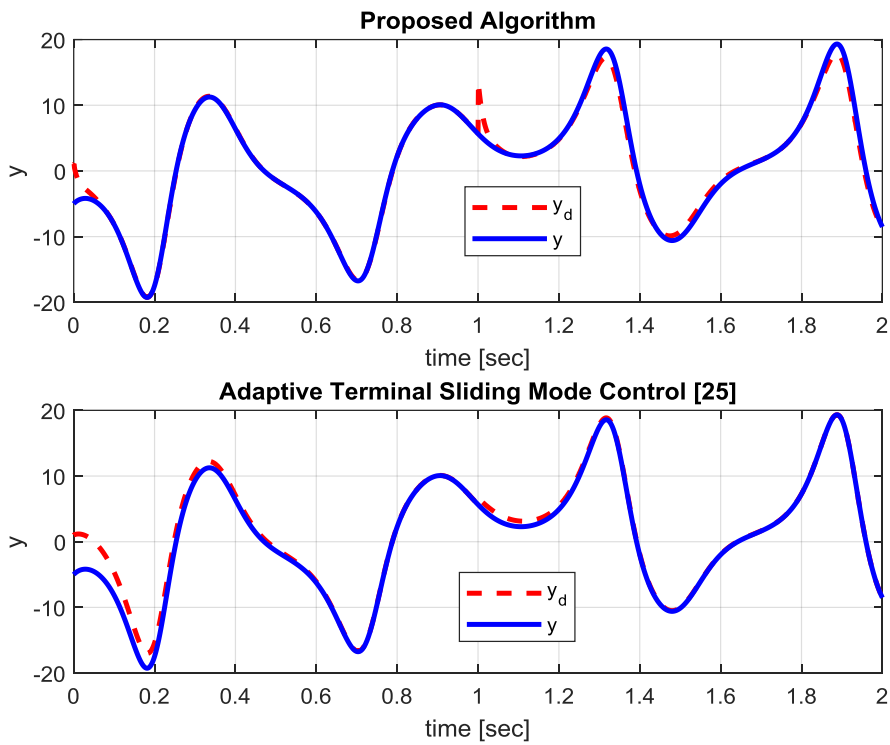
در روابط فوق،  $0 < \delta < 1$ ،  $0 < \mu < 1$  و  $\rho$  پارامتری مثبت است که دارای یک کران پایین وابسته به مقدار اولیه سطح لغزش است. پارامترهای  $M_i$  و  $L_i$  مقادیری مثبت هستند و بر اساس دستیابی به بهترین عملکرد حلقه بسته تعیین می‌شوند. برای قیاس صحیح بین الگوریتم پیشنهادی و روش ATSMC، فرض می‌شود که مرتبه کسری دو سیستم آشوبناک لورنز و چن یکسان و برابر با  $\alpha = 0.95$  است. بعلاوه، شرایط اولیه متغیرهای حالت نیز یکسان در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که ۵۰ درصد نامعینی از نوع ضربی در دینامیک متغیرهای  $y$  و  $z$  مربوط به سیستم آشوبناک لورنز از لحظه ۱ ثانیه به بعد رخ می‌دهد.

همان‌طور که در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود، همزمان‌سازی برای متغیر  $x$  برای هر دو الگوریتم با کیفیت عملکرد خوبی انجام شده است، با این تفاوت که زمان نشست در روش ATSMC خیلی بیشتر از روش پیشنهادی است. این مسئله در مورد شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نیز صدق می‌کند و در مجموع، روش پیشنهادی از سرعت گذرای بهتری برخوردار است. بعلاوه، در هنگام بروز نامعینی، روش ATSMC به‌ویژه هنگام همزمان‌سازی برای متغیر  $z$  با افت عملکرد زیادی همراه می‌شود. پاسخ همزمان‌سازی متغیر  $y$  در روش ATSMC نسبتاً بهتر از روش پیشنهادی است. بعلاوه، با توجه به شکل ۱۶، سیگنال کنترلی دوم در روش ATSMC تغییرات خیلی بزرگ‌تری نسبت به روش پیشنهادی دارد و در مقابل، سیگنال کنترلی سوم در روش پیشنهادی از دامنه تغییرات خیلی بیشتری نسبت به روش ATSMC برخوردار است. در حالت کلی می‌توان بیان کرد که روش پیشنهادی از عملکرد گذرای بهتر و واکنش‌پذیری نسبتاً بهتری برای دفع اثرات نامعینی برخوردار است. از طرفی، در رویکرد پیشنهادی برخلاف روش ATSMC نیازی به آگاهی از بخش غیرخطی دینامیک سیستم‌های آشوبناک نمی‌باشد. در حالی که اساس طراحی ATSMC بر مبنای معلوم بودن دینامیک لورنز و چن است. همچنین، ATSMC تنها برای حالتی که مرتبه کسری سیستم‌های آشوبناک لورنز و چن یکسان باشند، معتبر است.

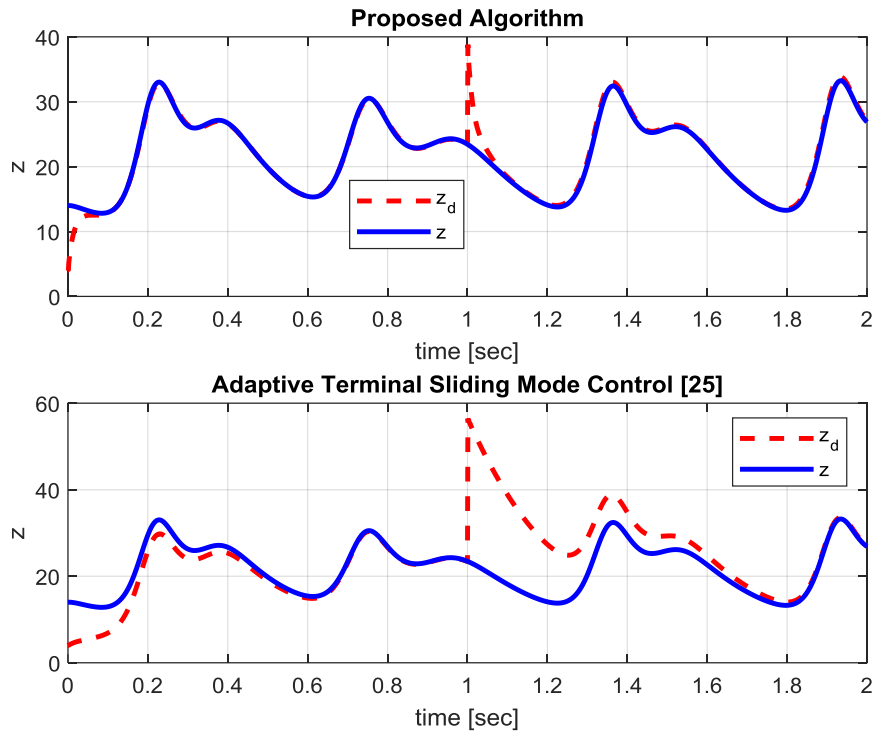
<sup>1</sup> Adaptive Terminal Sliding Mode Control



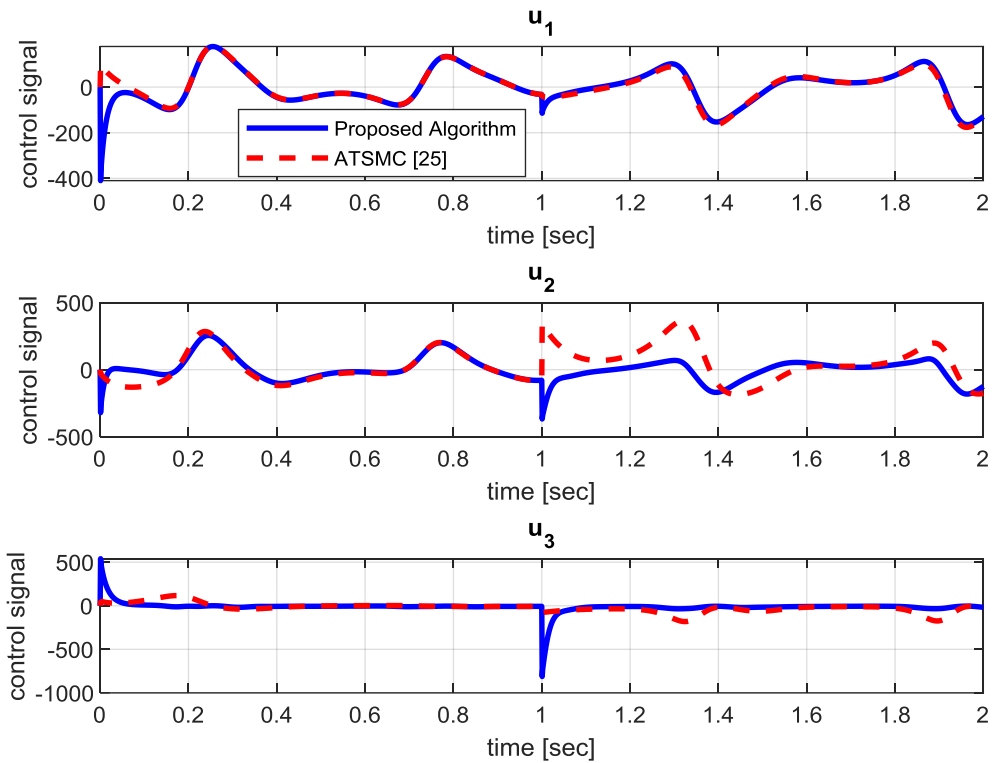
شکل ۱۳. همزمان‌سازی متغیر  $x$  به کمک الگوریتم پیشنهادی و روش کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی [۲۵]



شکل ۱۴: همزمان‌سازی متغیر  $y$  به کمک الگوریتم پیشنهادی و روش کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی [۲۵]



شکل ۱۵. همزمان‌سازی متغیر  $z$  به کمک الگوریتم پیشنهادی و روش کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی [۲۵]



شکل ۱۶. سیگنال‌های کنترلی تولیدشده به کمک الگوریتم پیشنهادی و روش کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی [۲۵]

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله از استراتژی کنترل مد لغزشی مبتنی بر قانون تطبیق غیرخطی برای حل مسائل پایداری و همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری لورنز و چن استفاده گردید. قانون کنترل پیشنهادی از دو مؤلفه اصلی تشکیل شده است. قانون کنترل کلیدزنی با هدف تضمین پایداری سیستم حلقه بسته و هدایت حالت‌های سیستم به سمت سطح لغزش و قانون کنترل تطبیقی با هدف تخمین بخش غیرخطی شامل عدم قطعیت سیستم و حذف اثرات آن. با تفکیک دینامیک سیستم به دو بخش خطی و غیرخطی و در نظر گرفتن یک رابطه رگرسور برای بخش غیرخطی شامل عدم قطعیت، ابتدا قانون کنترل مد لغزشی طراحی گردید. سپس، بر مبنای تئوری پایداری لیپانوف و با هدف پایداری مجانبی خطای ردیابی و خطای تخمین بخش غیرخطی، قانون تطبیق غیرخطی وابسته به سطح لغزش و متغیرهای حالت استخراج گردید. رویکرد پیشنهادی به شیوه‌ای تحلیلی و با بهره‌گیری از تئوری پایداری لیپانوف توسعه یافت و نتایج شبیه‌سازی نشان دادند که الگوریتم پیشنهادی با دقت و سرعت عملکرد بالایی قادر به تحقق مسئله پایدارسازی و همزمان‌سازی در حضور عدم قطعیت مدل است. در انتها نیز عملکرد الگوریتم پیشنهادی با روش کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی برای مسئله همزمان‌سازی مقایسه گردید و نشان داده شد که الگوریتم از رفتار گذرای بهتر و پاسخ‌های به‌مراتب بهتری هنگام بروز نامعینی برخوردار است. همچنین، در روش پیشنهادی نیازی به آگاهی از اثرات غیرخطی دینامیک سیستم و یکسان بودن مرتبه کسری دینامیک سیستم‌های آشوبناک لورنز و چن نمی‌باشد.

## مراجع

- [1] Azar, A. T., & Vaidyanathan, S. (Eds.). (2015). *Chaos modeling and control systems design* (Vol. 581). Germany: Springer.
- [2] Gholipour, R., Khosravi, A., & Mojallali, H. (2015). Multi-objective optimal backstepping controller design for chaos control in a rod-type plasma torch system using Bees algorithm. *Applied Mathematical Modelling*, 39(15), 4432-4444.
- [3] Wang, H., Weng, C., Song, Z., & Cai, J. (2020). Research on the law of spatial fractional calculus diffusion equation in the evolution of chaotic economic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 131, 109462.
- [4] Vaidyanathan, S. (2017). Adaptive integral sliding mode control of a chemical chaotic reactor system. In *Applications of sliding mode control in science and engineering* (pp. 371-392). Springer, Cham.
- [5] Xu, Y. M., Yao, Z., Hobiny, A., & Ma, J. (2019). Differential coupling contributes to synchronization via a capacitor connection between chaotic circuits. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 20(4), 571-583.
- [6] Wang, C., Liu, Z., Hobiny, A., Xu, W., & Ma, J. (2020). Capturing and shunting energy in chaotic Chua circuit. *Chaos, Solitons & Fractals*, 134, 109697.
- [7] Luo, S., Lewis, F. L., Song, Y., & Vamvoudakis, K. G. (2020). Adaptive backstepping optimal control of a fractional-order chaotic magnetic-field electromechanical transducer. *Nonlinear Dynamics*, 1-18.

- [8] Vafaei, V., Kheiri, H., & Akbarfam, A. J. (2019). Synchronization of fractional- order chaotic systems with disturbances via novel fractional- integer integral sliding mode control and application to neuron models. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(8), 2761-2773.
- [9] Ha, S., Liu, H., Li, S., & Liu, A. (2019). Backstepping-based adaptive fuzzy synchronization control for a class of fractional-order chaotic systems with input saturation. *International Journal of Fuzzy Systems*, 21(5), 1571-1584.
- [10] Shukla, M. K., & Sharma, B. B. (2018). Control and synchronization of a class of uncertain fractional order chaotic systems via adaptive backstepping control. *Asian Journal of Control*, 20(2), 707-720.
- [11] Behinfaraz, R., Ghaemi, S., & Khanmohammadi, S. (2019). Adaptive synchronization of new fractional- order chaotic systems with fractional adaption laws based on risk analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(6), 1772-1785.
- [12] Behinfaraz, R., & Badamchizadeh, M. A. (2018). Synchronization of different fractional order chaotic systems with time-varying parameter and orders. *ISA transactions*, 80, 399-410.
- [13] Nian, F., Liu, X., & Zhang, Y. (2018). Sliding mode synchronization of fractional-order complex chaotic system with parametric and external disturbances. *Chaos, Solitons & Fractals*, 116, 22-28.
- [14] Mofid, O., Mobayen, S., & Khooban, M. H. (2019). Sliding mode disturbance observer control based on adaptive synchronization in a class of fractional- order chaotic systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 33(3), 462-474.
- [15] Boubellouta, A., Zouari, F., & Boukroune, A. (2019). Intelligent fuzzy controller for chaos synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with input nonlinearities. *International Journal of General Systems*, 48(3), 211-234.
- [16] Modiri, A., & Mobayen, S. (2020). Adaptive terminal sliding mode control scheme for synchronization of fractional-order uncertain chaotic systems. *ISA Transactions*.
- [17] Rabah, K., & Ladaci, S. (2020). A fractional adaptive sliding mode control configuration for synchronizing disturbed fractional-order chaotic systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 39(3), 1244-1264.
- [18] Tabasi, M., & Balochian, S. (2018). Synchronization of the chaotic fractional-order Genesio–Tesi systems using the adaptive sliding mode fractional-order controller. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 29(1), 15-21.
- [19] Mohammadzadeh, A., Ghaemi, S., & Kaynak, O. (2019). Robust predictive synchronization of uncertain fractional-order time-delayed chaotic systems. *Soft Computing*, 23(16), 6883-6898.
- [20] Lu, S., & Wang, X. (2019). Observer-based command filtered adaptive neural network tracking control for fractional-order chaotic pmsm. *IEEE Access*, 7, 88777-88788.
- [21] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V. (2010). *Fractional-order systems and controls: fundamental*.
- [22] Li, C., & Yan, J. (2007). The synchronization of three fractional differential systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(2), 751-757.
- [23] Lu, J. G., & Chen, G. (2006). A note on the fractional-order Chen system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(3), 685-688.



- 
- [24] Diethelm, K., Ford, N. J., & Freed, A. D. (2002). A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4), 3-22.
- [25] Modiri, A., & Mobayen, S. (2020). Adaptive terminal sliding mode control scheme for synchronization of fractional-order uncertain chaotic systems. *ISA transactions*, 105, 33-50.