

ارائه‌ی ساختار کنترلی تلفیقی نوآورانه برای وسیله‌ی دریایی خودکار تحریک کامل

علی ابوئی

نویسنده مسئول، استادیار، بخش کنترل و الکترونیک، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، ایران،

Aliabooee@yazd.ac.ir



دانشگاه صنعتی سهند

DOR:

20.1001.1.23223146.1401.9.1.6.2

نشریه سالانه‌ی غیرخطی در مهندسی برق

دوره ۹ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۱

صفحات ۱۱۸ الی ۱۴۶

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

چکیده

در این مقاله، مسئله‌ی ردیابی زمان-متناهی مسیر برای وسیله‌ی دریایی خودکار تحریک کامل در حضور نامعینی پارامتری، عدم قطعیت مدل‌سازی و نیروهای اغتشاشی محیطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و به منظور حل آن، ساختار کنترلی تلفیقی جدیدی (از نوع غیرخطی مقاوم-تلفیقی زمان-متناهی) پیشنهاد می‌شود. در ابتدا، مدل جامعی برای توصیف رفتار سینماتیکی و دینامیکی وسیله‌ی دریایی خودکار تحریک کامل ارائه می‌گردد. در این مدل، اولاً تمامی ثابت‌های فیزیکی نامعلوم در نظر گرفته شده و ثانیاً عدم قطعیت‌های مدل‌سازی و نیروهای ناشناخته‌ی وارده از دریا به صورت یک عبارت برداری جمعی (با فرض کران‌داری درایه‌ها) لحاظ گردیده است. برای مواجهه با نامعینی پارامتری، بخش‌هایی از مدل غیرخطی وسیله‌ی دریایی که شامل ثابت‌های فیزیکی نامعلوم هستند، به فرم جامع رگرسوری خطی در پارامتر تبدیل می‌شوند. در ادامه، با تعمیم روش کنترل مد لغزشی پایاندار، تعریف چندین نوع خمینه‌ی لغزشی غیرخطی ابتکاری و تلفیق آن با قوانین به‌روزرسانی، یک ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تلفیقی طراحی می‌گردد تا وسیله‌ی دریایی در حضور عوامل نامطلوب فوق‌الذکر، بعد از سپری شدن مدت زمان قابل تنظیم متناهی (زمان همگرایی مطلق) دقیقاً به مسیر موردنظر برسد. قوانین به‌روزرسانی موجود در ساختار کنترلی، تخمین‌های پیوسته و لحظه‌ای را برای ثابت‌های فیزیکی نامعلوم وسیله دریایی فراهم کرده‌اند که همگی بعد از گذشت زمان همگرایی مطلق دقیقاً به مقادیر ثابتی می‌رسند و لزوماً با مقادیر اسمی ثابت‌های نامعلوم یکسان نیستند. سپس، با استفاده از تحلیل‌های ریاضی (مبتنی بر قضیه‌ی پایداری لیاپانوف) اثبات می‌گردد که ساختار کنترلی ترکیبی پیشنهادی قادر است ضمن برآورده ساختن هدف ردیابی مسیر، پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی را تضمین کند. علاوه بر این، تحلیل پایداری زمان-متناهی سیستم حلقه‌بسته نشان می‌دهد که ماکزیمم زمان همگرایی مطلق برای رسیدن دقیق وسیله‌ی دریایی به مسیر موردنظر، از مجموع دو زمان متناهی کوچک‌تر (به نام‌های زمان رسیدن و زمان نشست) تشکیل شده است و هر کدام از این دو زمان را می‌توان با استفاده از نامساوی‌های جداگانه‌ای مشخص کرد. در انتها با استفاده از نرم‌افزار MATLAB، سیستم حلقه‌بسته‌ی کشتی Cybership II شبیه‌سازی عددی می‌شود تا نشان داده شود که راهکار کنترلی غیرخطی مقاوم-تلفیقی پیشنهادی می‌تواند هدف ردیابی زمان متناهی مسیر دلخواه را با کارایی مناسب برآورده سازد.

واژه‌های کلیدی

وسيله‌ی دریایی خودکار،
پایداری زمان-متناهی کلی،
کنترل مد لغزشی پایاندار،
ساختار کنترلی تلفیقی،
کنترل‌کننده‌ی غیرخطی مقاوم-
تلفیقی.



Sahand University
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1401.9.1.6.2](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1401.9.1.6.2)

Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering

Vol.9, No.1

Spring and Summer 2022

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

An Innovative Hybrid Control Structure for a Fully-Actuated Unmanned Marine Vehicle

Ali Abooe

Corresponding Author, Assistant professor, Department of Electrical Engineering,
Yazd University, Yazd, Iran

ABSTRACT

Keywords

Unmanned marine vehicle,
Global finite-time stability,
Terminal sliding mode
control,
hybrid control structure,
Adaptive-robust nonlinear
controller.

In this paper, the finite-time path tracking problem for a typical fully-actuated unmanned marine vehicle subject to unknown physical constants, modelling uncertainties, and environmental disturbance forces (generated by sea waves) is studied and discussed. To deal with the mentioned tracking problem, a novel hybrid control structure (based on the finite-time adaptive-robust approach) is proposed. First, a comprehensive model is extracted and introduced to describe kinematic and dynamic behaviors of the unmanned marine vehicle. In this model, all physical constants of the unmanned marine vehicle are assumed to be unknown. Also, modelling uncertainties and unknown environmental disturbance forces are considered as a vector term added to the right side of the comprehensive model. To overcome the parametric uncertainties, all terms of the left side of the comprehensive model, which include unknown physical constants, are converted to the parametric linear regression form. Second, by developing the terminal sliding mode control method, defining several types of innovative nonlinear sliding manifolds, and designing adaptation laws, a novel adaptive-robust nonlinear control structure is proposed to exactly steer the unmanned marine vehicle (in the existence of aforementioned undesirable factors) to the desired trajectory within an adjustable finite time. Time responses related to the estimation of unknown physical constants will precisely converge to the fixed values after the finite time which are not identical to the nominal values of physical constants. Third, by utilizing mathematical analysis (based on the Lyapunov stability theorem), it is proven that the proposed hybrid control approach is able to both accomplish the path tracking objective and guarantee the global finite-time stability for the closed-loop unmanned marine vehicle. Moreover, the stability analysis demonstrates that the convergence finite time is the summation of two smaller finite time (called reaching and settling times) and these times could be determined by two novel separate inequalities. Finally, by using MATLAB software, the introduced adaptive-robust nonlinear control approach is simulated for the Cybership II and simulation results demonstrate that the finite-time path tracking aim is appropriately achieved.

۱- مقدمه

وسایل دریایی همواره با مشکلات زیادی از جمله هزینه‌ی دستمزد خدمه، کمبود نیروی متخصص دریانورد و سوانح دریایی ناشی از خطای انسانی روبرو هستند [۱]. در دهه‌های اخیر، وسایل دریایی خودکار^۱ [۲] در کاربردهای فراوانی به منظور برآورده ساختن اهداف متنوع به کار گرفته شده‌اند [۳]. نمونه‌هایی از کاربردهای عملی وسایل دریایی خودکار عبارتند از: حمل و نقل مسافر [۴]، عملیات اکتشاف محیط‌های پرخطر اقیانوس‌ها [۵]، حمل و نقل تجهیزات خاص در دریاها [۶]، ماموریت‌های نظامی و مانور در دریاها [۷-۹]، نقشه‌برداری از جزایر ناشناخته و کاربردهای مطالعاتی و پژوهشی بر روی محیط زیست دریاها [۱۰]. با استناد به این کاربردهای عملی، مسئله‌ی کنترل وسایل دریایی خودکار به یک موضوع تحقیقاتی جالب و جذاب در بین مهندسين کنترل تبدیل شده است [۱۱-۱۴] و در این راستا، مقالات پژوهشی متعددی منتشر شده‌اند [۱۵-۱۸]. مطالعه‌ی مقالات و مراجع ذکر شده، نشان می‌دهد که راهکارهای گوناگونی [۱۹-۲۷] برای کنترل انواع وسایل دریایی خودکار به کار گرفته شده‌اند که برخی از مهم‌ترین این راهکارها عبارتند از: استفاده از کنترل‌کننده‌های ساده‌ی PD یا PID، راهکار خطی‌سازی فیدبک [۱۷]، رویکرد کنترل مد لغزشی [۱]، [۵]، [۱۵]، [۱۸]، تکنیک کنترل گام به عقب (پسگام) [۳ و ۲۷]، الگوریتم کنترل پیش‌بین [۷ و ۱۱]، روش کنترل تطبیقی [۲۲]، راهکارهای کنترلی ترکیبی شامل لغزشی-تطبیقی [۹ و ۱۰]، گام به عقب-تطبیقی [۱۴]، عصبی-تطبیقی [۱۷ و ۲۰]، لغزشی-فازی [۱۳]، فازی-تطبیقی [۲۳] و عصبی-تطبیقی-لغزشی [۴ و ۱۵] مرور کلی بر روی مقالات علمی مرتبط با راهکارهای کنترلی وسایل دریایی این نتیجه را آشکار می‌سازد که چندین نقطه ضعف مشترک در اکثریت روش‌های پیشنهادی وجود دارد. برخی از این کاستی‌ها به صورت فهرست‌وار در زیر آورده شده‌اند.

(الف) در نظر گرفتن مدل خطی‌شده‌ی وسایل دریایی خودکار به جای مدل غیرخطی آن‌ها: بنابراین در چنین حالتی فقط پایداری مجانبی محلی تضمین شده و حتی پایداری مجانبی کلی نیز برآورده نمی‌گردد. از آنجایی که مدل خطی‌سازی شده حول نقطه‌ی کار دارای اعتبار است، چنانچه نقطه‌ی کار تغییر کند، قطعاً کارایی و عملکرد روش کنترلی کاهش شدیدی خواهد یافت.

(ب) عدم توجه به مسئله‌ی مانور وسایل دریایی خودکار در امتداد یک مسیر از قبل تعیین شده: راهکارهای ارائه شده در برخی مطالعات پژوهشی [۲۱]، فقط برای قرار گرفتن وسیله‌ی دریایی در یک موقعیت ثابت کارایی داشته و رهیافت‌های پیشنهادی آن‌ها قابل تعمیم به مسئله‌ی ردیابی مسیر از قبل تعیین شده نمی‌باشند.

(پ) عدم توجه به مسئله‌ی اندرکنش‌های موجود در مدل دینامیکی غیرخطی وسیله‌ی دریایی خودکار: برخی مراجع [۲] با صرف نظر کردن از عبارت‌های اندرکنشی، مدل پیچیده‌ی وسیله‌ی دریایی خودکار را به سه زیرسیستم غیرخطی مستقل از هم تفکیک کرده و سپس راهکار کنترلی خود را پیشنهاد می‌دهند. صرف نظر کردن از عبارت‌های اندرکنشی، باعث می‌شود که در پیاده‌سازی عملی، مشکلات جدی و حتی ناپایداری سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی خودکار رخ دهد.

(ت) در نظر نگرفتن نامعینی‌های پارامتری (نامعلوم بودن ثابت‌های فیزیکی)، عدم قطعیت‌های مدل‌سازی، نیروهای ناشناخته از طرف دریا و در نتیجه مقاوم نبودن روش‌های کنترلی پیشنهادی.

(ث) تضمین پایداری مجانبی محلی یا کلی (حتی در مواردی پایداری ضعیف^۲ UUB) برای سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی خودکار و عدم توجه به پایداری زمان-متناهی کلی: چنانچه سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی دارای پایداری مجانبی کلی باشد، با

^۱ Autonomous marine vehicles

^۲ Uniformly Ultimate Boundedness stability (UUB stability)

شروع از هر شرایط اولیه‌ای، وسیله‌ی دریایی به صورت مجانبی به مسیرهای مورد نظر همگرا می‌شود و همواره خطاهای ردیابی (حتی در حالت ماندگار) وجود خواهند داشت. اگر بتوان با استفاده از یک راهکار کنترلی، پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته را تضمین کرد، آنگاه با آغاز از هر شرایط اولیه‌ی دلخواهی، وسیله‌ی دریایی پس از سپری شدن مدت زمان متناهی دقیقاً به مسیر مورد نظر همگرا و خطاهای ردیابی صفر واقعی می‌شوند. در سالیان اخیر چندین راهکار کنترلی برای پایداری زمان-متناهی کلی سیستم‌های غیرخطی ارائه گردیده [۲۸] که یکی از موثرترین آن‌ها، روش کنترل مد لغزشی پایاندار (TSMC)^۱ [۲۹ و ۳۰] است. این روش تعمیمی از کنترل مد لغزشی معمولی بوده که دارای ویژگی‌های شاخص و متمایز می‌باشد. در مقایسه با دیگر روش‌های غیرخطی، برخی از برتری‌های راهکار کنترل مد لغزشی پایاندار عبارتند از: عدم نیاز به عملیات خطی‌سازی سیستم غیرخطی حول نقطه‌ی تعادل، مقاوم بودن در برابر انواع عدم قطعیت و اغتشاش، قابلیت پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته، فراهم ساختن پاسخ گذرای سریع و پیاده‌سازی عملی (تحقق فیزیکی) ساده و ارزان [۳۱].

با جمع‌بندی مباحث مطرح شده در فوق، این مقاله به طراحی ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تطبیقی زمان-متناهی برای وسیله‌ی دریایی خودکار سه درجه آزادی تحریک کامل با وجود نامعینی پارامتری، عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش می‌پردازد. در آغاز، مدل غیرخطی برای وسیله‌ی دریایی خودکار معرفی می‌گردد که متشکل از سه معادله‌ی دیفرانسیلی غیرخطی مرتبه‌ی دوم دارای اندرکنش خواهد بود. سپس در مدل مذکور فرض می‌گردد که تمام ثابت‌های فیزیکی (شامل جرم، اینرسی چرخشی، فاصله از مرکز ثقل و ضرایب مشتقی هیدرودینامیکی وسیله‌ی دریایی) نامعلوم بوده و عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش کراندار به صورت عبارات جمعی وجود دارند. در ادامه، با استفاده از تلفیق روش کنترل مد لغزشی پایاندار و رویکرد کنترل تطبیقی، ورودی‌های کنترلی چنان طراحی می‌شوند تا بتوانند بعد از گذشت زمان متناهی قابل تنظیمی، وسیله‌ی دریایی را به طور دقیق به مسیر از قبل تعیین شده برسانند. استفاده از روش کنترل مد لغزشی پایاندار، مقاوم بودن ساختار کنترلی پیشنهادی را در برابر عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش تضمین می‌کند. علاوه بر این، با استفاده از رویکرد کنترل تطبیقی، قوانین به‌روزرسانی برای تخمین ثابت‌های فیزیکی نامعلوم وسیله‌ی دریایی طراحی می‌شوند. در واقع ورودی‌های کنترلی پیشنهادی تلفیقی (که از نوع مقاوم-تطبیقی زمان-متناهی هستند) بایستی پایداری زمان-متناهی کلی را برای سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی تضمین کنند. بنابراین بعد از معرفی ساختار کنترلی ترکیبی پیشنهادی، بخش عمده‌ای از مقاله‌ی حاضر به تحلیل‌های ریاضی مرتبط با اثبات پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی اختصاص خواهد یافت. در مقایسه با مراجع علمی مرتبط، مقاله‌ی حاضر دارای چندین نوآوری قابل ذکر است که در زیر به صورت فهرست‌وار بیان شده‌اند.

۱) ارائه‌ی مدل دینامیکی جامع برای توصیف وسایل دریایی خودکار سه درجه آزادی با لحاظ کردن فرض‌های عملی و واقعی از جمله مشخص نبودن تمامی ثابت‌های فیزیکی مدل و کران بالای نرم اقلیدسی بردار اغتشاش و عدم قطعیت.

۲) طراحی ورودی‌های کنترلی وسیله‌ی دریایی خودکار براساس تعمیم راهکار کنترلی مد لغزشی پایاندار (با تعریف بردار خمینه‌های لغزشی تلفیقی خطی و غیرخطی) و ترکیب آن با قوانین تطبیقی به‌روزرسانی زمان-متناهی.

۳) برآورده ساختن هدف ردیابی مسیر دلخواه همراه با تضمین پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی خودکار سه درجه آزادی.

^۱Terminal Sliding Mode Control (TSMC)

۴) استخراج چندین نامساوی کاربردی ریاضیاتی برای مشخص کردن زمان همگرایی مطلق وسیله‌ی دریایی به مسیرهای موردنظر و هم‌چنین تعیین وابستگی‌های غیرخطی مابین این زمان همگرایی و ثابت‌های اختیاری موجود در راهکار کنترلی پیشنهادی.

۵) قابلیت تعمیم ساده و آسان راهکار کنترلی غیرخطی پیشنهادی مقاله‌ی حاضر به وسیله‌ی زیردریایی خودکار شش درجه آزادی. ساختار نوشتاری مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم، مروری مختصر بر روی لم‌های کاربردی مرتبط با پایداری زمان-متناهی ارائه می‌گردد. در بخش سوم مقاله، مدل غیرخطی وسیله‌ی دریایی خودکار همراه با فرض‌ها و ویژگی‌های مربوطه معرفی می‌گردند. بخش چهارم به فرمول‌بندی مسئله‌ی ردیابی زمان متناهی وسیله‌ی دریایی اختصاص می‌یابد. در بخش پنجم، ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تطبیقی جدیدی برای برآورده ساختن هدف ردیابی زمان-متناهی معرفی و پیشنهاد می‌گردد. تحلیل پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی، بخش عظیمی از بخش پنجم مقاله را تشکیل می‌دهد. در بخش ششم، نتایج شبیه‌سازی ساختار کنترلی پیشنهادی بر روی مدل کشتی Cybership II ارائه می‌گردند. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری کلی از مقاله در بخش هفتم آورده می‌شوند.

۲- مروری بر لم‌های کاربردی پایداری زمان-متناهی

در این بخش چندین لم کاربردی مرتبط با بحث پایداری زمان-متناهی سیستم‌های غیرخطی ارائه خواهند شد.

تعریف ۱. سیستم غیرخطی (۱) (از مرتبه‌ی n) را با بردار متغیرهای حالت $\{x(t) \in \mathbb{R}^n\}$ و نقطه‌ی تعادل یکتای $\{x = \mathbf{0}_{n \times 1}\}$ در نظر بگیرید. نماد $\{f(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ بیانگر تابع برداری پیوسته بوده و فرض می‌گردد همواره شرایط یکتایی جواب برای سیستم غیرخطی (۱) وجود دارد.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ with } \{f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, x(t) \in \mathbb{R}^n \text{ and } x(t=0) = x_0\} \quad (1)$$

نقطه‌ی تعادل $\{x = \mathbf{0}_{n \times 1}\}$ را پایدار زمان-متناهی کلی گویند اگر شرایط (الف) و (ب) برقرار باشند. (الف) نقطه‌ی تعادل $\{x = \mathbf{0}_{n \times 1}\}$ ، پایدار مجانبی کلی باشد، (ب) به ازای هر بردار شرایط اولیه x_0 ، زمان متناهی T^* وجود داشته باشد به نحوی که دو تساوی ریاضیاتی $\{\lim_{t \rightarrow T^*} x(t) = \mathbf{0}_{n \times 1}\}$ و $\{x(t) = \mathbf{0}_{n \times 1} \text{ for } t \geq T^*\}$ برآورده شوند [۲۸ و ۳۱].

یادآوری ۱. پایداری زمان-متناهی کلی نقطه‌ی تعادل $\{x = \mathbf{0}_{n \times 1}\}$ سیستم غیرخطی (۱) بدان معنی است که با شروع از هر بردار شرایط اولیه‌ای پس از گذشت مدت زمان متناهی T^* ، پاسخ‌های زمانی تمامی متغیرهای حالت سیستم غیرخطی دقیقاً به صفر رسیده و همواره صفر باقی می‌مانند. در سراسر این مقاله به زمان متناهی T^* ، زمان همگرایی مطلق T^* گفته می‌شود.

لم ۱. سیستم غیرخطی (۱) را با بردار شرط اولیه x_0 و نقطه‌ی تعادل یکتای $\{x = \mathbf{0}_{n \times 1}\}$ در نظر بگیرید. این نقطه‌ی تعادل، پایدار زمان-متناهی کلی است اگر تابع اسکالر مثبت مشتق‌پذیر بیکران‌شعاعی^۱ $\{V(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ and } V(\mathbf{0}_{n \times 1}) = 0\}$ و ضرایب ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 با شروط $\{\rho_1 > 0\}$ ، $\{0 < \rho_2 < 1\}$ و $\{\rho_3 > 0\}$ ، وجود داشته باشند که $\{\dot{V}(x(t)) + \rho_1 V^{\rho_2}(x(t)) \leq 0\}$ برآورده شود. علاوه بر این، نامساوی $\{T^* \leq (\rho_1(1 - \rho_2))^{-1} V^{1-\rho_2}(x_0)\}$ می‌تواند برای تعیین کران بالای زمان همگرایی مطلق T^* مورد استفاده قرار گیرد [۱، ۲۹ و ۳۲].

^۱Radially unbounded positive scalar function

لم ۲. سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم (۲) را با متغیرهای حالت x_1 و x_2 و نقطه‌ی تعادل یکتای $\{x_2 = x_1 = 0\}$ در نظر بگیرید. در این سیستم، l_1 و l_2 دو ضریب مثبت اختیاری با شرط $\{l_1 > l_2 > 0\}$ هستند و نماد $\text{sign}(\dots)$ بیانگر تابع علامت می‌باشد. برای سیستم غیرخطی (۲) با وجود فرض‌های ذکر گردیده، به صورت تحلیلی اثبات شده که نقطه‌ی تعادل $\{x_2 = x_1 = 0\}$ پایدار زمان-متناهی کلی است. به عبارت دیگر چنانچه سیستم (۲) با هر بردار شرایط اولیه‌ی دلخواهی تحریک گردد، پاسخ‌های زمانی هر دو متغیر حالت، کراندار بوده و با گذشت زمان همگرایی مطلق T^* دقیقاً به صفر رسیده و همواره صفر باقی می‌مانند.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -l_1 \text{sign}(x_1(t)) - l_2 \text{sign}(x_2(t)) \end{cases} \quad (2)$$

هم‌چنین نشان داده شده است که می‌توان کران بالای زمان همگرایی مطلق T^* را با استفاده از نامساوی (۳) مشخص نمود. در این نامساوی، ضریب عددی \bar{l} اختیاری بوده و از بازه‌ی $\left\{ \left(\sqrt{2(l_1 - l_2)} \right)^{-1} < \bar{l} < \left(\sqrt{2(l_1 + l_2)} \right)^{-1} \right\}$ انتخاب می‌گردد. سه ضریب عددی l_3 ، l_4 و l_5 به ترتیب با استفاده از رابطه‌های ریاضیاتی مشخص $\{l_3 = l_1 + l_2 \text{sign}(x_1 x_2)\}$ ، $\{l_4 = \sqrt{0.5 l_3} |\sqrt{2 l_3} \bar{l} - 1|\}$ و $\{l_5 = \sqrt{2(l_3)^{-1}} (\sqrt{2 l_3} \bar{l} - 1)^{-1} \text{sign}(x_1 x_2)\}$ تعیین می‌شوند [۲۸ و ۲۹].

$$\begin{cases} T^* \leq 2(\min(\mu_4))^{-1} \sqrt{\Psi(x_1(t=0), x_2(t=0))} \\ \Psi(x_1(t), x_2(t)) \triangleq \begin{cases} 0.25(l_4)^2 (H(x_1(t), x_2(t)))^2 & \text{if } x_1 x_2 \neq 0 \\ 0.25(\bar{l})^2 x_2^2(t) & \text{if } x_1 = 0 \\ 0.25|x_1(t)| & \text{if } x_2 = 0 \end{cases} \\ H(x_1(t), x_2(t)) \triangleq (l_3)^{-1} x_2(t) \text{sign}(x_1(t)) + l_5 \sqrt{|x_1(t)| + 0.5(l_3)^{-1} x_2^2(t)} \end{cases} \quad (3)$$

لم ۳. سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم (۲) را با متغیرهای حالت x_1 و x_2 و نقطه‌ی تعادل یکتای $\{x_2 = x_1 = 0\}$ در نظر بگیرید. در این سیستم، ضریب توانی ϱ همواره عددی ثابت در بازه‌ی $\{0 < \varrho < 1\}$ می‌باشد. برای سیستم (۴) به صورت تحلیلی نشان داده شده که نقطه‌ی تعادل $\{x_2 = x_1 = 0\}$ پایدار زمان-متناهی کلی بوده و با اعمال هر بردار شرایط اولیه‌ی دلخواهی، پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت بعد از سپری شدن زمان همگرایی مطلق T^* به طور دقیق صفر می‌شوند و پس از آن همواره صفر باقی می‌مانند. علاوه بر این، کران بالای زمان همگرایی مطلق T^* با استفاده از نامساوی (۵) تعیین می‌گردد.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -|x_2(t)|^\varrho \text{sign}(x_2(t)) - \text{sig}^{\varrho(2-\varrho)^{-1}}(\ell(x_1(t), x_2(t))) \\ \text{sig}^{\varrho(2-\varrho)^{-1}}(\ell(x_1(t), x_2(t))) \triangleq |\ell(x_1(t), x_2(t))|^{\varrho(2-\varrho)^{-1}} \text{sign}(\ell(x_1(t), x_2(t))) \\ \ell(x_1(t), x_2(t)) \triangleq x_1(t) + (2 - \varrho)^{-1} |x_2(t)|^{2-\varrho} \text{sign}(x_2(t)) \end{cases} \quad (4)$$

در نامساوی (۵)، ϑ_1 و ϑ_2 دو ضریب ثابت اختیاری با شرایط $\{0 < \vartheta_1 < 1\}$ و $\{\vartheta_2 > 1\}$ هستند [۱ و ۳۰].

$$\begin{cases} T^* \leq (\varpi(1 - \varrho))^{-1} (3 - \varrho) (\mathfrak{B}(x_1(t=0), x_2(t=0)))^{\frac{1-\varrho}{3-\varrho}} \\ \mathfrak{B}(x_1(t), x_2(t)) \triangleq \frac{2-\varrho}{3-\varrho} |\ell(x_1(t), x_2(t))|^{\frac{3-\varrho}{2-\varrho}} + \vartheta_1 x_2 \ell(x_1(t), x_2(t)) + \frac{\vartheta_2}{3-\varrho} |x_2(t)|^{3-\varrho} \\ \varpi \triangleq - \left(\max_{(x_1(t), x_2(t)) \in \Xi} \mathfrak{B}(x_1(t), x_2(t)) \right) \text{ with } \Xi = \{(x_1(t), x_2(t)): \mathfrak{B}(x_1(t), x_2(t)) = 1\} \end{cases} \quad (5)$$

لم ۴. سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم (۶) را با نقطه‌ی تعادل یکتای $\{x_1 = x_2 = 0\}$ در نظر بگیرید. در این سیستم، ضرایب حقیقی مثبت $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ به نحوی انتخاب گردیده‌اند که ریشه‌های چندجمله‌ای درجه دوم $\{Z^2 + \varepsilon_2 Z + \varepsilon_1 = 0\}$ دارای قسمت‌های حقیقی منفی باشند. علاوه بر این، ضریب توانی σ_2 عددی اختیاری در بازه‌ی $\{0 < \sigma_2 < 1\}$ و ضریب توانی σ_1 برابر با $\left\{ \sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2 - \sigma_2} \right\}$ است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\varepsilon_1 \text{sig}^{\sigma_1}(x_1(t)) - \varepsilon_2 \text{sig}^{\sigma_2}(x_2(t)) \\ \text{sig}^{\sigma_i}(x_i(t)) \triangleq \text{sign}(x_i(t)) |x_i(t)|^{\sigma_i} \text{ for } i = 1, 2 \end{cases} \quad (6)$$

برای سیستم (۶) اثبات گردیده که نقطه‌ی تعادل $\{x_1 = x_2 = 0\}$ پایدار زمان-متناهی کلی بوده و با آغاز از هر شرایط اولیه‌ی دلخواه و پس از گذشت زمان همگرایی مطلق T^* ، پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دقیقاً صفر شده و همواره صفر باقی می‌مانند. هم‌چنین نامساوی (۷)، کران بالای زمان همگرایی مطلق T^* را ارائه می‌دهد. در (۷)، $\{P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ و $\{Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ ماتریس‌های مثبت معین متقارن اختیاری می‌باشند که معادله‌ی جبری-ماتریسی لیاپانوف $\{PA + A^T P = -Q\}$ را برای ماتریس A برآورده می‌سازند. هم‌چنین $\lambda_{\max}(P)$ و $\lambda_{\min}(Q)$ به ترتیب بیانگر بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های P و Q هستند [۲۶].

$$\begin{cases} T^* \leq \sigma_2 \left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \right) \left(\frac{\sqrt{\frac{1-\sigma_2}{\sigma_2}} (\mathbf{x}(t=0))}{1-\sigma_2} \right) \text{ where } \mathbf{x}(t) = [x_1^{\sigma_1}(t), x_2^{\sigma_2}(t)]^T \\ \mathfrak{F}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T P \mathbf{x}(t) \text{ and } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

لم ۵. برای دو بردار دلخواه $\{x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\}$ و $\{y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T\}$ ، همواره نامساوی کوشی-شوارتز $\{ \|y\| \|x\| \geq |y^T x| \leq \|y\| \|x\| \}$ برقرار می‌باشد که نمادهای $\|x\|$ و $\|y\|$ معرف نرم‌های اقلیدسی دو بردار مذکور هستند [۱].

لم ۶. اگر $\{a_{\mathcal{K}}, \mathcal{K} = 1, 2, 3, \dots, n\}$ اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه همواره نامساوی $\{\sqrt{\sum_{\mathcal{K}=1}^n |a_{\mathcal{K}}|^2} \leq \sum_{\mathcal{K}=1}^n |a_{\mathcal{K}}|\}$ برقرار است [۳۰ و ۳۱].

۳- معرفی مدل جامع وسیله‌ی دریایی خودکار سه درجه آزادی تحریک کامل

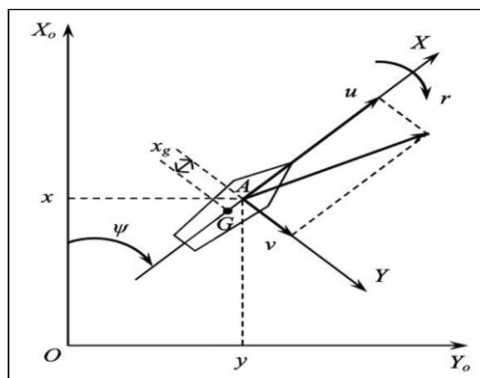
در این بخش، مدل جامعی از وسیله‌ی دریایی خودکار سه درجه آزادی تحریک کامل (دارای سه ورودی کنترلی) معرفی می‌گردد که دربرگیرنده‌ی روابط سینماتیکی و دینامیکی است. در توصیف سینماتیکی، ابعاد هندسی حرکت وسیله‌ی دریایی و ارتباط میان دستگاه‌های مختصات مورد بررسی قرار گرفته، اما نیروهای موثر برای حرکت، در توصیف دینامیکی مورد تحلیل قرار می‌گیرند. برای بیان مدل وسیله‌ی دریایی خودکار، از دو دستگاه مختصات به نام‌های مرجع بدنه-ثابت^۱ و مرجع زمین-ثابت^۲ استفاده شده که در دستگاه اول، مبدا مختصات بر روی مرکز ثقل وسیله‌ی دریایی و در دستگاه دوم، مبدا مختصات بر روی سطح دریا لحاظ می‌گردد. در شکل ۱، تصویری مفهومی از وسیله‌ی دریایی خودکار در صفحه‌ی دو بعدی $\{(X_0 - Y_0)\}$ با در نظر گرفتن دو دستگاه مختصات مرجع بدنه-ثابت (OX_0Y_0) و زمین-ثابت (AXY) ارائه گردیده است. فرم ابتدایی برای مدل جامع وسیله‌ی دریایی خودکار سه درجه آزادی تحریک کامل به صورت (۸) معرفی می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = R(\psi)v \\ \overline{M}\dot{v} + \overline{C}(v)v + \overline{D}(v)v = \tau \end{cases} \quad (8)$$

^۱ Body-fixed reference frame

^۲ Earth-fixed reference frame

که در آن، $\{\eta = [x \ y \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3\}$ معرف بردار وضعیت وسیله‌ی دریایی (شامل موقعیت و جهت‌گیری) است. در این بردار، متغیرهای x و y بیانگر موقعیت وسیله‌ی دریایی در صفحه‌ی دو بعدی $\{(X_0 - Y_0)\}$ و ψ معرف زاویه‌ی سمت^۱ این وسیله می‌باشند.



شکل ۱. تصویری از وسیله‌ی دریایی در صفحه‌ی دو بعدی با وجود دو دستگاه مختصات مرجع زمین-ثابت (OX_0Y_0) و بدنه-ثابت (AXY) [۱]

با توجه به شکل ۱، بردار $\{\eta \in \mathbb{R}^3\}$ در دستگاه مختصات مرجع زمین-ثابت (OX_0Y_0) تعریف شده است. $\{v = [u \ v \ r]^T \in \mathbb{R}^3\}$ بردار سرعت‌های زاویه‌ای وسیله‌ی دریایی خودکار در دستگاه مختصات مرجع بدنه-ثابت (AXY) بوده که در شکل ۱ قابل مشاهده می‌باشد. در بردار $\{v = [u \ v \ r]^T\}$ ، درایه‌های u ، v و r به ترتیب بیانگر سرعت‌های خطی سرج^۲، سوی^۳ و سرعت زاویه‌ای یاو^۴ می‌باشند. در مدل (۸)، بردار ورودی‌های اعمالی به وسیله‌ی دریایی با نماد $\{\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T \in \mathbb{R}^3\}$ معرفی شده است. به منظور انتقال بردار سرعت $\{v \in \mathbb{R}^3\}$ از دستگاه مختصات مرجع بدنه-ثابت به دستگاه مختصات مرجع زمین-ثابت، ماتریس تبدیل $\{R(\psi) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}\}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد که این ماتریس در (۹) معرفی گردیده است.

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \forall \psi \in [0, 2\pi] \quad (9)$$

باید توجه داشت که ماتریس تبدیل $R(\psi)$ همواره دارای دو ویژگی $\{R^T(\psi)R(\psi) = I_{3 \times 3}\}$ و $\{\|R(\psi)\| = 1\}$ بوده که $I_{3 \times 3}$ همان ماتریس همانی و $\|R(\psi)\|$ بیانگر نرم اقلیدسی ماتریس تبدیل می‌باشند [۱]. در مدل (۸)، نمادهای $\bar{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ، $\bar{C}(v) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ و $\bar{D}(v) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ به ترتیب ماتریس‌های اینرسی، کوریولیس و میرایی می‌باشند که همگی در (۱۰) تعریف شده‌اند. برای مدل وسیله‌ی دریایی، ماتریس \bar{M} همواره مثبت معین متقارن $\{\bar{M} = \bar{M}^T\}$ بوده در حالی که ماتریس \bar{C} همواره پادمقارن $\{\bar{C} = -\bar{C}^T\}$ است. تمامی درایه‌های ماتریس‌های \bar{M} ، $\bar{C}(v)$ و $\bar{D}(v)$ به طور کامل در رابطه‌ی (۱۰) و (۱۱) معرفی شده‌اند.

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \bar{C}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13}(v) \\ 0 & 0 & c_{23}(v) \\ -c_{13}(v) & -c_{23}(v) & 0 \end{bmatrix}, \bar{D}(v) = \begin{bmatrix} d_{11}(v) & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}(v) & d_{23}(v) \\ 0 & d_{32}(v) & d_{33}(v) \end{bmatrix} \quad (10)$$

و

¹ Heading angle

² surge

³ sway

⁴ yaw

$$\begin{cases} m_{11} = m - X_{\dot{u}} \\ m_{22} = m - Y_{\dot{v}} \\ m_{23} = mx_g - Y_{\dot{r}} \\ m_{32} = mx_g - N_{\dot{v}} \\ m_{33} = I_z - N_{\dot{r}} \end{cases} \text{ and } \begin{cases} d_{11}(\mathbf{v}) = -X_u - X_{|u|u}|u| - X_{uuu}u^2 \\ d_{22}(\mathbf{v}) = -Y_v - Y_{|v|v}|v| - Y_{|r|v}|r| \\ d_{23}(\mathbf{v}) = -Y_r - Y_{|v|r}|v| - Y_{|r|r}|r| \\ d_{32}(\mathbf{v}) = -N_v - N_{|v|v}|v| - N_{|r|v}|r| \\ d_{33}(\mathbf{v}) = -N_r - N_{|v|r}|v| - N_{|r|r}|r| \end{cases} \text{ and } \begin{cases} c_{13}(\mathbf{v}) = -m_{11} - m_{23}r \\ c_{23}(\mathbf{v}) = m_{11}u \end{cases} \quad (11)$$

در (۱۱)، ثابت‌های فیزیکی m ، I_z و x_g به ترتیب جرم، اینرسی لحظه‌ای چرخشی yaw و فاصله از مرکز ثقل وسیله دریایی می‌باشند. مابقی ثابت‌های فیزیکی $X_u, X_{|u|u}, X_{uuu}, Y_v, Y_{|v|v}, Y_{|r|v}, Y_{|r|r}, N_v, N_{|v|v}, N_{|r|v}, N_{|r|r}, X_{uu}, X_{|u|u}, N_{\dot{r}}, N_{\dot{v}}, Y_{\dot{r}}, Y_{\dot{v}}, X_{\dot{u}}, N_r, N_v, Y_r, Y_v, X_u$ و $N_{|v|r}, N_{|r|v}, Y_{|r|v}, Y_{|v|r}, Y_{|r|r}, N_{|v|v}, Y_{|v|v}, X_{uuu}, X_{|u|u}, N_{\dot{r}}, N_{\dot{v}}, Y_{\dot{r}}, Y_{\dot{v}}, X_{\dot{u}}, N_r, N_v, Y_r, Y_v, X_u$ مربوط به مشتقات هیدرودینامیکی وسیله دریایی هستند. با مشتق‌گیری زمانی از تساوی $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi})\mathbf{v}$ و اعمال آن به مدل جامع ترکیبی $\{\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}\}$ ، مدل جامع ترکیبی برای وسیله دریایی خودکار سه درجه آزادی تحریک کامل، به صورت (۱۲) حاصل می‌شود که شامل سه معادله‌ی دیفرانسیلی غیرخطی مرتبه‌ی دوم دارای اندرکنش است. برای لحاظ کردن عدم قطعیت مدل‌سازی، دینامیک‌های مدل نشده و اغتشاش‌های محیطی (ناشی از جریان آب، باد و موج دریا)، بردار $\{\Delta(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}\}$ به مدل جامع ترکیبی (۱۲) افزوده شده است. از دیدگاه مهندسی کنترل، بردار نامعینی $\Delta(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t)$ از نوع جمعی سازگار بوده و برای آن، فرض ۱ منظور می‌گردد [۱].

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\tau} + \Delta(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t) \quad (12)$$

فرض ۱. برای بردار $\Delta(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t)$ فرض می‌گردد همواره نامساوی $\|\Delta(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t)\| < \gamma$ برقرار است. در این نامساوی، نماد $\|\Delta(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t)\|$ معرف نرم اقلیدسی و γ عددی ثابت و نامعلوم می‌باشد.

لازم به ذکر است که در طراحی بردار ورودی کنترلی وسیله دریایی نمی‌توان مستقیماً از ثابت نامعلوم γ استفاده کرد. بنابراین بایستی مقدار γ با یک قانون به‌روزرسانی تخمین زده شده و از مقدار تخمینی در ضابطه‌ی ورودی‌های کنترلی استفاده گردد. ماتریس‌های $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})$ ، $\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$ و $\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$ که در (۱۲) ظاهر شده‌اند، به صورت (۱۳) قابل بیان هستند.

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}) \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\psi}) \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}) (\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{v}) - \bar{\mathbf{M}} \mathbf{P}(\boldsymbol{\psi})) \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\psi}) \text{ with } \mathbf{P}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\boldsymbol{\psi}} & 0 \\ -\dot{\boldsymbol{\psi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}) \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\psi}) \end{cases} \quad (13)$$

از آنجایی که $\bar{\mathbf{M}}$ ماتریسی مثبت معین و متقارن است، با استناد به $\{\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}) \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\psi})\}$ می‌توان نشان داد که ماتریس $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})$ نیز مثبت معین و متقارن خواهد بود. با توجه به یاد متقارن بودن ماتریس $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{v})$ و استفاده از $\{\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}) (\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{v}) - \bar{\mathbf{M}} \mathbf{P}(\boldsymbol{\psi})) \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\psi})\}$ اثبات می‌گردد که ماتریس $(\dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\eta}) - 2\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}))$ همواره پادمقارن است. برای وسیله دریایی (۱۲)، همواره ویژگی‌های ۱ الی ۵ صادق و برقرار هستند [۱، ۳ و ۲۰].

ویژگی ۱. ماتریس $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})$ همواره مثبت معین است. بنابراین معکوس این ماتریس یعنی $\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ به ازای هر بردار $\boldsymbol{\eta}$ در هر لحظه از زمان وجود دارد [۱، ۳ و ۲۰].

ویژگی ۲. با توجه به پادمقارن بودن ماتریس $(\dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\eta}) - 2\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}))$ ، می‌توان ادعا کرد که به ازای هر بردار دلخواه $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}\}$ همواره عبارت اسکالری $\{\mathbf{x}^T (\dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\eta}) - 2\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})) \mathbf{x}\}$ برابر با صفر می‌باشد [۱ و ۲۰].

ویژگی ۳. ماتریس $\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$ همواره مثبت معین می‌باشد. این بدان معنی است که به ازای هر بردار دلخواه $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}\}$ همواره عبارت اسکالری $\{\mathbf{x}^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{x}\}$ مثبت خواهد بود [۱ و ۲۰].

برای مدل وسیله‌ی دریایی خودکار (۱۲)، علاوه بر بردار نامعینی $\Delta(\eta, \dot{\eta}, t)$ ، فرض می‌گردد که تمامی ثابت‌های فیزیکی موجود در ماتریس‌های $M(\eta)$ ، $C(\eta, \dot{\eta})$ و $D(\eta, \dot{\eta})$ (که در بالا به آنها اشاره شد) نامعلوم هستند. به عبارت دیگر، وسیله‌ی دریایی علاوه بر بردار عدم قطعیت مدل‌سازی $\Delta(\eta, \dot{\eta}, t)$ شامل نامعینی‌های پارامتری هم می‌باشد. مدل جامع (۱۲) نشان می‌دهد که تمامی ثابت‌های فیزیکی مرتبط با وسیله‌ی دریایی در عبارت‌های سمت چپ تساوی قرار دارند. بر اساس خاصیت مشترکی که برای تمام وسیله‌های دریایی خودکار سه درجه آزادی وجود دارد، می‌توان عبارت‌های شامل ثابت‌های فیزیکی را به فرم رگرسوری خطی در پارامتر نوشت. برای مدل ترکیبی (۱۲)، فرم رگرسوری مذکور به صورت ویژگی ۴ ارائه گردیده که حاصل ضرب ماتریس رگرسور و بردار ثابت‌های نامعلوم است.

ویژگی ۴. به ازای هر بردار $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ و مشتق زمانی آن \dot{A} ، همواره می‌توان عبارت‌های جمعی سمت چپ مدل جامع ترکیبی (۱۲) را به فرم رگرسوری خطی در پارامتر (۱۴) نوشت. در این فرم رگرسوری، $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_{\theta} \times 1}\}$ بردار پارامترهای نامعلوم و $\{Y(\eta, \dot{\eta}, A, \dot{A}) \in \mathbb{R}^{3 \times n_{\theta}}\}$ ماتریس رگرسور معلوم می‌باشند [۱، ۳ و ۲۰].

$$M(\eta)\dot{A} + C(\eta, \dot{\eta})A + D(\eta, \dot{\eta})A = Y(\eta, \dot{\eta}, A, \dot{A})\theta \quad (14)$$

با استناد به فرم رگرسوری (۱۴)، تمام ثابت‌های فیزیکی ماتریس‌های $M(\eta)$ ، $C(\eta, \dot{\eta})$ و $D(\eta, \dot{\eta})$ در بردار $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_{\theta} \times 1}\}$ ظاهر می‌شوند. بنابراین در طراحی بردار ورودی‌های کنترلی اعمالی به وسیله‌ی دریایی، نمی‌توان به طور مستقیم بردار θ را به کار برد. برای مواجهه با این چالش، باید قانون به‌روزرسانی مناسبی پیشنهاد شود تا به صورت لحظه‌ای و پیوسته بردار θ تخمین زده شده و از بردار تخمینی در فرآیند بردار ورودی‌های کنترلی استفاده گردد.

ویژگی ۵. ماتریس $M(\eta)$ متعلق به وسیله‌ی دریایی (۱۲) را در نظر بگیرید. آنگاه به ازای هر بردار دلخواه $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ نامساوی $\{0 \leq \lambda_{\min}(M(\eta))\|A\|^2 \leq A^T M(\eta) A \leq \lambda_{\max}(M(\eta))\|A\|^2\}$ برقرار است که $\lambda_{\min}(M(\eta))$ و $\lambda_{\max}(M(\eta))$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقادیر ماتریس $M(\eta)$ هستند [۱، ۳ و ۲۰].

یادآوری ۲. در ادامه‌ی مقاله به منظور کوتاه‌تر شدن طول نوشتاری فرمول‌ها، به جای نمادهای $M(\eta)$ ، $C(\eta, \dot{\eta})$ ، $D(\eta, \dot{\eta})$ و $R(\psi)$ و $\Delta(\eta, \dot{\eta}, t)$ از نمادهای مختصر شده‌ی M ، C ، D ، R و Δ استفاده می‌شود.

۴- بیان مسئله‌ی ردیابی زمان-متناهی مسیر برای وسیله‌ی دریایی خودکار

برای برآورده شدن هدف ردیابی زمان-متناهی وسیله‌ی دریایی (۱۲)، باید بردار ورودی‌های کنترلی $\{\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ چنان طراحی گردند که در حضور نامعینی پارامتری، عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش، سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی دارای پایداری زمان-متناهی کلی باشد و بردار وضعیت $\{\eta(t) = [x \ y \ \psi]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ بعد از سپری شدن زمان همگرایی مطلق قابل تنظیمی به طور دقیق به بردار مسیر مورد نظر $\{\eta_d(t) = [x_d \ y_d \ \psi_d]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ همگرا شود. از نظر ریاضی، برای برآورده ساختن هدف ردیابی زمان-متناهی، بردار ورودی‌های کنترلی بایستی به گونه‌ای طراحی و پیشنهاد گردند که شرایط (۱۵) محقق گردند. در (۱۵)، منظور از T_{total}^* همان زمان همگرایی مطلق قابل تنظیم است.

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow T_{\text{total}}^*} \eta(t) = \eta_d(t) \right\} \text{ and } \left\{ \eta(t) = \eta_d(t) \text{ for } t \geq T_{\text{total}}^* \right\} \quad (15)$$

فرض ۲. در سراسر مقاله فرض می‌گردد با استفاده از روابط هندسی، بردار مسیرهای مورد نظر $\eta_d(t)$ از قبل تعیین و محاسبه گردیده است تا حرکت وسیله‌ی دریایی را در امتداد مسیر دلخواهی بر روی سطح دریا نتیجه دهد.

فرض ۳. بردار مسیرهای مورد نظر $\{\eta_d(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ به صورت تحلیلی در اختیار بوده و تمامی درایه‌های آن حداقل تا دو مرتبه مشتق‌پذیر هستند. بنابراین درایه‌های سه بردار $\{\eta_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ \psi_d(t)]^T\}$ ، $\{\dot{\eta}_d(t) = [\dot{x}_d(t) \ \dot{y}_d(t) \ \dot{\psi}_d(t)]^T\}$ و $\{\ddot{\eta}_d(t) = [\ddot{x}_d(t) \ \ddot{y}_d(t) \ \ddot{\psi}_d(t)]^T\}$ کاملاً مشخص بوده و می‌توانند مستقیماً در طراحی بردار ورودی‌های کنترلی مورد استفاده قرار گیرند.

به منظور فرمول‌بندی مسئله‌ی ردیابی زمان-متناهی، دو بردار خطای ردیابی $\{e_{\text{odd}}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ و $\{e_{\text{even}}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ به صورت (۱۶) تعریف می‌گردند که $e_{\text{odd}}(t)$ اختلاف میان بردار وضعیت وسیله‌ی دریایی $\eta(t)$ و بردار مسیرهای مورد نظر $\eta_d(t)$ است.

$$\begin{cases} e_{\text{odd}}(t) \triangleq \eta(t) - \eta_d(t) \quad \text{or} \quad e_{\text{odd}}(t) \triangleq \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_3(t) \\ e_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) - x_d(t) \\ y(t) - y_d(t) \\ \psi(t) - \psi_d(t) \end{pmatrix} \\ e_{\text{even}}(t) \triangleq \dot{\eta}(t) - \dot{\eta}_d(t) \quad \text{or} \quad e_{\text{even}}(t) \triangleq \begin{pmatrix} e_2(t) \\ e_4(t) \\ e_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}_d(t) \\ \dot{y}(t) - \dot{y}_d(t) \\ \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}_d(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

با مشتق‌گیری زمانی از دو بردار خطای $e_{\text{odd}}(t)$ و $e_{\text{even}}(t)$ ، سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{e}_{\text{odd}}(t) = e_{\text{even}}(t) \\ \dot{e}_{\text{even}}(t) = \ddot{\eta}(t) - \ddot{\eta}_d(t) \end{cases} \quad (17)$$

بدیهی است که هدف ردیابی زمان-متناهی وسیله‌ی دریایی خودکار، معادل و هم‌ارز با مسئله‌ی پایدارسازی زمان-متناهی سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) است. به عبارت دیگر برای برآورده شدن هدف ردیابی زمان-متناهی (۱۵)، بایستی بردار ورودی $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$ به گونه‌ای طراحی گردد که سیستم دینامیکی (۱۷) پایدار زمان-متناهی کلی باشد و شرایط ذکر شده در (۱۸) تحقق یابد.

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T_{\text{total}}^*} e_{\text{odd}}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad \text{and} \quad e_{\text{odd}}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \text{for} \quad t \geq T_{\text{total}}^* \\ \lim_{t \rightarrow T_{\text{total}}^*} e_{\text{even}}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad \text{and} \quad e_{\text{even}}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \text{for} \quad t \geq T_{\text{total}}^* \end{cases} \quad (18)$$

۵- طراحی ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تطبیقی زمان-متناهی

در این بخش از مقاله، از راهکار کنترل مد لغزشی پایاندار به عنوان روش اساسی و پایه برای طراحی بردار ورودی‌های کنترلی وسیله‌ی دریایی استفاده می‌شود. روش کنترل مد لغزشی پایاندار، تعمیمی از همان رویکرد کنترل مد لغزشی معمولی است که در آن خمینه‌های لغزشی غیرخطی جایگزین سطوح لغزشی خطی شده‌اند تا علاوه بر پایدارسازی مجانبی، قابلیت پایدارسازی زمان-متناهی نیز فراهم گردد. طراحی بردار ورودی‌های کنترلی وسیله‌ی دریایی با استفاده از کنترل مد لغزشی پایاندار شامل دو مرحله‌ی متوالی است. در مرحله‌ی اول، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $s(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ به گونه‌ای ابتکاری تعریف می‌گردد که سیستم دینامیکی مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ دارای پایداری زمان-متناهی کلی با زمان متناهی همگرایی T_{settling}^* باشد. در مرحله‌ی دوم، بردار ورودی‌های کنترلی به گونه‌ای طراحی می‌شوند که سیستم غیرخطی وسیله‌ی دریایی خودکار با اعمال این ورودی‌ها پس از گذشت مدت زمان متناهی T_{reaching}^* (که زمان رسیدن نامیده می‌شود) به سیستم دینامیکی مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ تبدیل

گردد. در نتیجه با اعمال راهکار کنترل مد لغزشی پایاندار، اولاً پایداری زمان-متناهی کلی سیستم غیرخطی حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی تضمین می‌شود و ثانیاً پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت آن بعد از گذشت مدت زمان همگرایی مطلق $\{T_{total} \leq (T_{settling} + T_{reaching})\}$ به طور دقیق به مسیرهای موردنظر می‌رسند و برای لحظات $\{t \geq T_{total}^*\}$ خطاهای ردیابی صفر مطلق خواهند شد [۳۰، ۳۴-۳۲]. از آنجایی که راهکار کنترل مد لغزشی پایاندار ذاتاً روشی مقاوم در مقابل عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش است، علاوه بر تضمین پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته، می‌تواند با بردار نامعینی $\Delta(\eta, \dot{\eta}, t)$ مقابله کند. با توجه به اینکه در مدل وسیله‌ی دریایی (۱۲)، نامعینی پارامتری هم (شامل ثابت‌های فیزیکی نامعلوم) وجود دارد برای تخمین این ثابت‌های نامعلوم، قوانین به‌روزرسانی بر اساس مفاهیم کنترل تطبیقی طراحی شده و با ورودی‌های کنترلی غیرخطی لغزشی پایاندار ترکیب می‌شوند. بنابراین ساختار کنترلی پیشنهادی برای برآورده ساختن هدف ردیابی وسیله‌ی دریایی، راهکاری ترکیبی بر اساس تلفیق کنترل مد لغزشی پایاندار و کنترل تطبیقی است. برای اولین ساختار کنترلی، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $\{s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ به صورت (۱۹) پیشنهاد و تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned} \{s(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad s_3(t)]^T \triangleq \dot{\eta}(t) - K(t) \\ K(t) = [k_1(t) \quad k_2(t) \quad k_3(t)]^T = \dot{\eta}_d(t) - E_1(t) - E_2(t) \end{aligned} \quad (19)$$

در آن، دو نماد $E_1(t)$ و $E_2(t)$ توابع برداری از خطاهای ردیابی $\{e_i(t) \text{ for } i = 1, 2, \dots, 6\}$ هستند که به صورت (۲۰) تعریف شده‌اند. در (۲۰)، $l_{1_1}, l_{1_2}, l_{1_3}, l_{2_1}, l_{2_2}, l_{2_3}$ ضرایب مثبت اختیاری بوده و باید به گونه‌ای انتخاب گردند که شرایط $\{l_{1_1} > l_{2_1} > 0\}, \{l_{1_2} > l_{2_2} > 0\}$ و $\{l_{1_3} > l_{2_3} > 0\}$ برآورده شوند. بردار ورودی‌های کنترلی $\tau(t)$ برای وسیله‌ی دریایی (۱۲)، به صورت (۲۱) پیشنهاد می‌گردد که λ و γ ضرایب مثبت آزاد می‌باشند. با استناد به ویژگی ۴، ماتریس رگرسوری $\{Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K}) \in \mathbb{R}^{3 \times n_\theta}\}$ از طریق تساوی $M(\eta)\dot{K} + C(\eta, \dot{\eta})K + D(\eta, \dot{\eta})K = Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})\theta$ قابل محاسبه است. همانطور که در ویژگی ۴ ذکر شد، بردار $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ حاوی ثابت‌های فیزیکی نامعلوم وسیله‌ی دریایی بوده و نمی‌تواند به طور مستقیم در طراحی بردار ورودی کنترلی به کار رود. باید توجه داشت که برای بردار ثابت‌های فیزیکی نامعلوم $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ همواره فرض ۴ برقرار است.

$$E_1(t) = \begin{bmatrix} l_{1_1} \int_0^t \text{sign}(e_1(\nu)) d\nu \\ l_{1_2} \int_0^t \text{sign}(e_3(\nu)) d\nu \\ l_{1_3} \int_0^t \text{sign}(e_5(\nu)) d\nu \end{bmatrix} \text{ and } E_2(t) = \begin{bmatrix} l_{2_1} \int_0^t \text{sign}(e_2(\nu)) d\nu \\ l_{2_2} \int_0^t \text{sign}(e_4(\nu)) d\nu \\ l_{2_3} \int_0^t \text{sign}(e_6(\nu)) d\nu \end{bmatrix} \quad (20)$$

در (۲۰)، $l_{1_1}, l_{1_2}, l_{1_3}, l_{2_1}, l_{2_2}, l_{2_3}$ ضرایب مثبت اختیاری بوده و باید به گونه‌ای انتخاب گردند که شرایط $\{l_{1_1} > l_{2_1} > 0\}$ و $\{l_{1_2} > l_{2_2} > 0\}$ و $\{l_{1_3} > l_{2_3} > 0\}$ برآورده شوند.

فرض ۴. برای بردار ثابت‌های فیزیکی نامعلوم وسیله‌ی دریایی $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ ، همواره نامساوی $\{\|\theta\| < h\}$ صادق است که h کرانی ثابت و نامعلوم می‌باشد.

لازم به ذکر است که در طراحی بردار ورودی‌های کنترلی نمی‌توان از h به طور مستقیم استفاده کرد. بنابراین مقدار این کران بالا با قانون به‌روزرسانی مناسبی به صورت لحظه‌ای و پیوسته تخمین زده شده و در ضابطه‌ی ورودی‌های کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\begin{cases} \tau(t) = R^{-1} \left(-\lambda s(t) - (\zeta + \hat{\nu}(t)) \text{sign}(s(t)) + U_+(t) \right) \\ U_+(t) = Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K}) \hat{\theta}(t) + U_{++}(t) \\ U_{++}(t) = -\|Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})\| \text{sign}(s(t)) (\|\hat{\theta}(t)\| + \hat{h}(t)) \end{cases} \quad (21)$$

بردار ورودی‌های کنترلی $\tau(t)$ برای وسیله‌ی دریایی (۱۲)، به صورت (۲۱) پیشنهاد می‌گردد که λ و ζ ضرایب مثبت آزاد می‌باشند. با استناد به ویژگی ۴، ماتریس رگرسوری $\{Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K}) \in \mathbb{R}^{3 \times n_\theta}\}$ از طریق تساوی $\{M(\eta)\dot{K} + C(\eta, \dot{\eta})K + D(\eta, \dot{\eta})K = Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})\theta\}$ قابل محاسبه است. همانطور که در ویژگی ۴ ذکر شد، بردار $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ حاوی ثابت‌های فیزیکی نامعلوم وسیله‌ی دریایی بوده و نمی‌تواند به طور مستقیم در طراحی بردار ورودی کنترلی به کار رود. باید توجه داشت که برای بردار ثابت‌های فیزیکی نامعلوم $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ همواره فرض ۴ برقرار است.

در (۲۱)، $\{\hat{\nu}(t) \in \mathbb{R}\}$ ، $\{\hat{h}(t) \in \mathbb{R}\}$ و $\{\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ به ترتیب تخمین‌هایی از مقادیر ثابت نامعلوم γ ، h و بردار ثابت‌های نامعلوم $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}$ می‌باشند که با استفاده از قوانین به‌روزرسانی (۲۲) به صورت لحظه‌ای و پیوسته حاصل می‌شوند.

$$\begin{cases} \hat{\nu}(t) = \|s(t)\| & \text{with } \nu(0) > 0 \\ \hat{\theta}(t) = -\Gamma_{n_\theta \times n_\theta}^{-1} Y^T s(t) \\ \hat{h}(t) = \|Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})\| \|s(t)\| & \text{with } h(0) > 0 \end{cases} \quad (22)$$

در دومین قانون به‌روزرسانی (۲۲)، $\{\Gamma \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}\}$ ماتریسی مربعی و قطری با درایه‌های آزاد مثبت می‌باشد. بدیهی است که این ماتریس ثابت دلخواه تاثیر بسزایی بر روی سرعت همگرا شدن درایه‌های $\hat{\theta}(t)$ به مقادیر ثابت و کراندار دارد. با دقت در (۲۲) مشخص می‌گردد که قوانین به‌روزرسانی پیشنهادی، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی غیرخطی مرتبه اول هستند که با انتگرال‌گیری از طرفین آن‌ها، پاسخ‌های زمانی مرتبط با $\hat{\nu}(t)$ ، $\hat{h}(t)$ و $\hat{\theta}(t)$ به صورت عددی به دست می‌آیند.

در ادامه به منظور خلاصه‌نویسی، نمادهای s ، τ و به ترتیب جایگزین $Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})$ ، $s(t)$ و $\tau(t)$ می‌شوند.

یادآوری ۳. با توجه به قوانین به‌روزرسانی (۲۲)، به طور مستقیم نتیجه می‌گردد که توابع تخمینی اسکالری $\hat{\nu}(t)$ و $\hat{h}(t)$ همواره برای تمام زمان‌ها مثبت هستند.

قضیه ۱. مدل جامع وسیله‌ی دریایی خودکار سه درجه آزادی تحریک کامل (۱۲) را به همراه فرض‌های ۱ الی ۴ و ویژگی‌های ۱ الی ۵ در نظر بگیرد. چنانچه بردار وردی کنترلی (۲۱) به این وسیله‌ی دریایی اعمال شود، آنگاه نتایج (الف)، (ب)، (پ)، (ت) و (ث) حاصل می‌شود. (الف): سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی خودکار دارای پایداری زمان-متناهی کلی است، (ب): تمامی خطاهای ردیابی مرتبط با وسیله‌ی دریایی بعد از گذشت زمان همگرایی مطلق $\{T_{\text{total}}^* \leq (T_{\text{reaching}}^* + T_{\text{settling}}^*)\}$ دقیقاً به صفر رسیده و همواره صفر باقی خواهند ماند، (پ): دو زمان متناهی T_{reaching}^* و T_{settling}^* می‌توانند با نامساوی‌های (۲۳) و (۲۴) تعیین گردند، (ت): بردار تخمینی $\{\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ پس از سپری شدن زمان همگرایی مطلق T_{total}^* دقیقاً به بردار ثابت $\{\theta_{T^*} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ می‌رسد که لزوماً θ_{T^*} با بردار اسمی پارامترهای نامعلوم $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ برابر نیست، (ث): دو تابع تخمینی اسکالری $\hat{\nu}(t)$ و $\hat{h}(t)$ بعد از زمان همگرایی مطلق T_{total}^* دقیقاً به مقادیر ثابت γ_{T^*} و h_{T^*} می‌رسند که لزوماً این مقادیر ثابت با مقادیر اسمی پارامترهای نامعلوم γ و h یکسان نیستند.

$$\begin{cases} T_{\text{reaching}}^* \leq (\sqrt{\Omega} \xi)^{-1} \sqrt{\left(\mathbf{s}^T(0) \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}(0)) \mathbf{s}(0) \right) + \frac{1}{\Omega} (\hat{\gamma}(0) - \bar{\gamma})^2 + \frac{1}{\Omega} (\hat{h}(0) - \bar{h})^2} \\ \xi \triangleq \min \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{M})}}, F_1, F_2 \right), \{F_1 \triangleq (\Omega^{-1} - 1) \|\mathbf{s}\|\}, \{F_2 \triangleq (\Omega^{-1} - 1) \|\mathbf{Y}\| \|\mathbf{s}\|\} \end{cases} \quad (23)$$

در (۲۳)، Ω یک ضریب دلخواه در بازه‌ی $\{0 < \Omega < 1\}$ است. علاوه بر این \bar{h} و $\bar{\gamma}$ دو عدد دلخواه به اندازه‌ی کافی بزرگ هستند که همواره نامساوی‌های $\{\hat{h}(t) \leq \bar{h}\}$ و $\{\hat{\gamma}(t) \leq \bar{\gamma}\}$ برقرار می‌باشند. زمان متناهی همگرایی T_{settling}^* به صورت $\{T_{\text{settling}}^* \leq (\max_i(T_{s_i}))\}$ with $i = 1, 2, 3\}$ تعیین می‌شود که T_{s_i} برای $\{i = 1, 2, 3\}$ در (۲۴) مشخص گردیده است.

$$\begin{cases} T_{s_i} \leq \left(2(\min(l_{4_i}))^{-1} \sqrt{\Psi_i(e_{2i-1}(t = T_{\text{reaching}}^*), e_{2i}(t = T_{\text{reaching}}^*))} \right) \\ \Psi_i(e_{2i-1}(t), e_{2i}(t)) = \begin{cases} 0.25(l_{4_i})^2 (H_i(e_{2i-1}, e_{2i}))^2 & \text{if } e_{2i-1}e_{2i} \neq 0 \\ 0.25(\bar{l}_i)^2 (e_{2i}(t))^2 & \text{if } e_{2i-1} = 0 \\ 0.25|e_{2i-1}(t)| & \text{if } e_{2i} = 0 \end{cases} \\ H_i(e_{2i-1}(t), e_{2i}(t)) = (l_{3_i})^{-1} e_{2i}(t) \text{sign}(e_{2i-1}(t)) + l_{5_i} \sqrt{|e_{2i-1}(t)| + 0.5(l_{3_i})^{-1} (e_{2i}(t))^2} \\ l_{3_i} = l_{1_i} + l_{2_i} \text{sign}(e_{2i-1}(t)e_{2i}(t)), \quad l_{4_i} = \sqrt{0.5l_{3_i}} |\sqrt{2l_{3_i}} \bar{l}_i - 1| \\ l_{5_i} = \sqrt{2(l_{3_i})^{-1} (\sqrt{2l_{3_i}} \bar{l}_i - 1)^{-1} \text{sign}(e_{2i-1}(t)e_{2i}(t))} \end{cases} \quad (24)$$

در (۲۴) مقدار \bar{l}_i به صورت اختیاری با استفاده از نامساوی $\left\{ \left(\sqrt{2(l_{1_i} + l_{2_i})} \right)^{-1} < \bar{l}_i < \left(\sqrt{2(l_{1_i} - l_{2_i})} \right)^{-1} \right\}$ انتخاب می‌شود. علاوه بر این، سه ضریب عددی l_{3_i} ، l_{4_i} و l_{5_i} به ترتیب با استفاده از تساوی‌های $\{l_{3_i} = l_{1_i} + l_{2_i} \text{sign}(e_{2i-1}e_{2i})\}$ و $\{l_{4_i} = \sqrt{0.5l_{3_i}} |\sqrt{2l_{3_i}} \bar{l}_i - 1|\}$ و $\{l_{5_i} = \sqrt{2(l_{3_i})^{-1} (\sqrt{2l_{3_i}} \bar{l}_i - 1)^{-1} \text{sign}(e_{2i-1}e_{2i})}\}$ تعیین می‌شوند. □

اثبات ۱. این اثبات از چهار مرحله‌ی اساسی و متوالی تشکیل شده است. قبل از بیان این مراحل، ابتدا ضابطه‌ی سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی با وجود دو بردار خمینه‌های لغزشی پیشنهادی و ورودی‌های کنترلی تشکیل می‌گردد. با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۱۹)، $\{\dot{\mathbf{s}}(t) = \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) - \dot{\mathbf{K}}(t)\}$ به صورت $\{\dot{\mathbf{s}}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \mathbf{K}(t)\}$ نتیجه می‌شود. با جایگذاری $\{\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{s}(t) + \dot{\mathbf{K}}(t)\}$ و $\{\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\mathbf{K}}(t)\}$ در مدل جامع (۱۲)، سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی بر حسب $\mathbf{s}(t)$ و $\dot{\mathbf{s}}(t)$ به صورت (۲۵) حاصل می‌گردد.

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{C} \mathbf{s}(t) + \mathbf{D} \mathbf{s}(t) = -(\mathbf{M} \dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{C} \mathbf{K}(t) + \mathbf{D} \mathbf{K}(t)) + \mathbf{R} \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\Delta} \quad (25)$$

چنانچه ویژگی ۴ به عبارت $\{\mathbf{M} \dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{C} \mathbf{K}(t) + \mathbf{D} \mathbf{K}(t)\}$ اعمال گردد، این عبارت به فرم رگرسوری خطی در پارامتر $\{\mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}})\boldsymbol{\theta}\}$ قابل بیان است. بنابراین با جایگزینی این فرم رگرسوری در (۲۵)، سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی به صورت (۲۶) بازنویسی می‌گردد.

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{C} \mathbf{s}(t) + \mathbf{D} \mathbf{s}(t) = -\mathbf{Y}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}})\boldsymbol{\theta} + \mathbf{R} \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\Delta} \quad (26)$$

در فرآیند اثبات، هر زمانی که به عبارت برداری $\{\mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}\}$ نیاز بود، از تساوی (۲۶) استفاده خواهد شد. برای مرحله‌ی اول اثبات، دو خطای تخمینی $\{\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \in \mathbb{R}^{n\theta \times 1}\}$ و $\{\tilde{\gamma}(t) \in \mathbb{R}\}$ به صورت $\{\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \triangleq \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}\}$ و $\{\tilde{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma}(t) - \gamma\}$ تعریف می‌گردند که $\boldsymbol{\theta}$ بردار ثابت‌های فیزیکی نامعلوم وسیله‌ی دریایی و γ همان کران بالای بردار نامعینی $\boldsymbol{\Delta}$ است. با توجه به ثابت بودن بردار $\boldsymbol{\theta}$ و اسکالر γ ، مشتق زمانی این دو خطای تخمین به فرم دو تساوی $\{\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}(t) = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t)\}$ و $\{\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t)\}$ استخراج می‌گردند. در همین مرحله،

تابع کاندیدای لیپانوف $V_1(t)$ به صورت (۲۷) تعریف می‌شود که اولاً تابعی همواره مثبت بوده و ثانیاً شرط سکون $\{V_1(\mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}_{n_\theta \times 1}) = 0\}$ برقرار می‌باشد. باید توجه داشت که $\{\Gamma \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}\}$ همان ماتریس قطری مثبت معین ثابت در بحث قوانین به‌روزرسانی است.

$$V_1(\mathbf{s}(t), \tilde{\gamma}(t), \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)) \triangleq 0.5(\mathbf{s}^T(t)\mathbf{M}\mathbf{s}(t) + \tilde{\gamma}^2(t) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t)\Gamma\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)) \quad (27)$$

در ادامه برای خلاصه نویسی از دو نماد مختصر شده‌ی $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ و $\tilde{\gamma}$ به جای $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$ و $\tilde{\gamma}(t)$ استفاده خواهد شد. با مشتق‌گیری زمانی از این کاندیدای لیپانوف، عبارت $\dot{V}_1(t)$ به صورت $\{\dot{V}_1(t) = 0.5\mathbf{s}^T\dot{\mathbf{M}}\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{s}} + \tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\Gamma\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}\}$ نتیجه می‌شود. با استناد به $\{\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}(t) = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t)\}$ ، $\{\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t)\}$ و جایگذاری $\{\mathbf{M}\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{C}\mathbf{s} - \mathbf{D}\mathbf{s} - \mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Delta}\}$ ، عبارت $\dot{V}_1(t)$ به صورت تساوی گسترش یافته‌ی (۲۸) حاصل می‌گردد.

$$\dot{V}_1(t) = 0.5\mathbf{s}^T(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\mathbf{s} - \mathbf{s}^T\mathbf{D}\mathbf{s} - \mathbf{s}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{s}^T\boldsymbol{\Delta} + \tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\Gamma\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \quad (28)$$

با ارجاع به ویژگی ۲، عبارت اسکالری $\{\mathbf{s}^T(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\mathbf{s}\}$ همواره صفر است و از تساوی (۲۸) حذف می‌گردد. علاوه بر این با توجه به ویژگی ۳ و مثبت معین بودن ماتریس \mathbf{D} ، عبارت اسکالری $\{-\mathbf{s}^T\mathbf{D}\mathbf{s}\}$ همواره منفی است و چنانچه این عبارت از تساوی (۲۸) حذف گردد، نامساوی (۲۹) برای $\dot{V}_1(t)$ استخراج می‌شود.

$$\dot{V}_1(t) \leq \{-\mathbf{s}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{s}^T\boldsymbol{\Delta} + \tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\Gamma\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}\} \quad (29)$$

با استناد به لم ۵ و اعمال فرض ۱، نامساوی $\{\mathbf{s}^T\boldsymbol{\Delta} \leq |\mathbf{s}^T\boldsymbol{\Delta}| \leq \|\mathbf{s}\|\|\boldsymbol{\Delta}\| \leq \gamma\|\mathbf{s}\|\}$ برای عبارت اسکالری $\{\mathbf{s}^T\boldsymbol{\Delta}\}$ نتیجه می‌شود. با جایگذاری $\{\mathbf{s}^T\boldsymbol{\Delta} \leq \gamma\|\mathbf{s}\|\}$ در (۲۹)، نامساوی $\{\dot{V}_1(t) \leq (-\mathbf{s}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\tau} + \gamma\|\mathbf{s}\| + \tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\Gamma\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}})\}$ به دست می‌آید. چنانچه $\{\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{s}\}$ و $\{\hat{\gamma} = \|\mathbf{s}\|\}$ از قوانین به‌روزرسانی (۲۲) به این نامساوی اخیر اعمال شوند، نامساوی (۳۰) برای $\dot{V}_1(t)$ حاصل می‌گردد.

$$\dot{V}_1(t) \leq \{-\mathbf{s}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\tau} + \gamma\|\mathbf{s}\| + \tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{s}\} \quad (30)$$

با اعمال بردار ورودی‌های کنترلی (۲۱) به (۳۰)، نامساوی گسترش یافته‌ی (۳۱) برای $\dot{V}_1(t)$ استخراج می‌شود.

$$\dot{V}_1(t) \leq \{-\mathbf{s}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} - \lambda\mathbf{s}^T\mathbf{s} - (\zeta + \hat{\gamma})\mathbf{s}^T\text{sign}(\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T\mathbf{U}_+ + (\gamma + \tilde{\gamma})\|\mathbf{s}\| - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{s}\} \quad (31)$$

با استناد به دو تساوی ریاضی $\{\mathbf{s}^T\text{sign}(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^3|s_i|\}$ ، $\{\mathbf{s}^T\mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|^2\}$ و جایگذاری \mathbf{U}_+ ، نامساوی (۳۱) به (۳۲) تبدیل می‌شود. باید توجه داشت که \mathbf{U}_+ از (۲۱) انتخاب شده است.

$$\dot{V}_1(t) \leq \{-\mathbf{s}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} - \lambda\|\mathbf{s}\|^2 - (\zeta + \hat{\gamma})(\sum_{i=1}^3|s_i|) + \mathbf{s}^T\mathbf{Y}\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + (\gamma + \tilde{\gamma})\|\mathbf{s}\| - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\mathbf{U}_{++}\} \quad (32)$$

با در نظر گرفتن تعریف $\{\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \triangleq \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}\}$ ، سه عبارت $\{-\mathbf{s}^T\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta}\}$ ، $\{\mathbf{s}^T\mathbf{Y}\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\}$ و $\{-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{s}\}$ از سمت راست نامساوی (۳۲) حذف می‌گردند. با توجه به مثبت بودن $(\zeta + \hat{\gamma})$ و استفاده از $\{-(\sum_{i=1}^3|s_i|) \leq -\|\mathbf{s}\|\}$ ، برای عبارت $\dot{V}_1(t)$ نامساوی (۳۳) نتیجه می‌گردد.

$$\dot{V}_1(t) \leq \{-\lambda\|\mathbf{s}\|^2 - (\zeta + \hat{\gamma})\|\mathbf{s}\| + \gamma\|\mathbf{s}\| + \tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} + \mathbf{s}^T\mathbf{U}_{++}\} \quad (33)$$

با اعمال U_{++} از (۲۱) در (۳۳) و در نظر گرفتن $\{-s^T \text{sign}(s) = -\sum_{i=1}^3 |s_i| \leq \|s\|\}$ نامساوی (۳۴) حاصل می‌شود.

$$\dot{V}_1(t) \leq \{-\lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\| + (\gamma - \hat{\gamma}) \|s\| + \tilde{\gamma} \|s\| - \|Y\| \|\hat{\theta}(t)\| \|s\| - \hat{h}(t) \|Y\| \|s\|\} \quad (34)$$

با در نظر گرفتن خطای تخمینی $\{\tilde{\gamma} \triangleq \hat{\gamma} - \gamma\}$ ، دو عبارت $\{\tilde{\gamma} \|s\|\}$ و $\{(\gamma - \hat{\gamma}) \|s\|\}$ که در سمت راست (۳۴) وجود دارند، همدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین (۳۴) به نامساوی ساده شده‌ی $\{\dot{V}_1(t) \leq -\lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\| - \|Y\| \|\hat{\theta}(t)\| \|s\| - \hat{h}(t) \|Y\| \|s\|\}$ تبدیل می‌گردد. از آنجایی که $\{-\|Y\| \|\hat{\theta}(t)\| \|s\|\}$ و $\{-\hat{h}(t) \|Y\| \|s\|\}$ همواره منفی‌اند، نامساوی نهایی $\{\dot{V}_1(t) \leq -\lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\|\}$ نتیجه می‌شود. با توجه به تعریف کاندیدای لیاپانوف $\{V_1(t) \triangleq 0.5(s^T M s + \tilde{\gamma}^2 + \hat{\theta}^T \Gamma \hat{\theta})\}$ ، در نظر گرفتن نامساوی $\{\dot{V}_1(t) \leq -\lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\| \leq 0\}$ و استفاده مستقیم از قضیه‌ی اساسی پایداری لیاپانوف می‌توان نتیجه گرفت که تمام درایه‌های بردار خمینه‌ی لغزشی $s(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad s_3(t)]^T$ توابعی کراندار هستند و نرم اقلیدسی این بردار با گذشت زمان به صورت مجانبی صفر می‌شود. به عبارت دیگر رابطه‌ی حدی $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t)\| = 0\}$ برقرار است. علاوه بر این می‌توان دریافت که درایه‌های بردار $\hat{\theta}(t)$ همواره کراندار هستند. با توجه به ثابت بودن بردار θ و لحاظ کردن تعریف $\{\hat{\theta}(t) \triangleq \hat{\theta}(t) - \theta\}$ ، مستقیماً این نکته فهمیده می‌شود که درایه‌های بردار $\hat{\theta}(t)$ نیز کراندار هستند. هم‌چنین به طور مشابه، می‌توان ادعا کرد که $\tilde{\gamma}(t)$ کراندار است، بنابراین با استناد به تعریف $\{\tilde{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma}(t) - \gamma\}$ و ثابت بودن γ ، تابع تخمینی $\hat{\gamma}(t)$ نیز همواره کراندار است. چنانچه دو قانون به‌روزرسانی $\{\hat{\theta}(t) = -\Gamma_{n_\theta}^{-1} Y^T s(t)\}$ و $\{\hat{\gamma}(t) = \|s(t)\|\}$ در کنار رابطه‌ی حدی $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t)\| = 0\}$ در نظر گرفته شوند، صریحاً دو رابطه‌ی حدی $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta_{T^*}\}$ و $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\gamma}(t) = \gamma_{T^*}\}$ استخراج می‌گردد. بعداً در ادامه‌ی اثبات نشان داده خواهد شد که دو رابطه‌ی حدی اخیر برای حالت $\{t \rightarrow T_{\text{total}}^*\}$ نیز برقرارند. شایان ذکر است که مقادیر نهایی θ_{T^*} و γ_{T^*} با مقادیر نامی (اسمی) θ و γ لزوماً برابر نیستند. با توجه به اینکه نشان داده شد $\hat{\gamma}(t)$ همواره کراندار است، بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که همواره عدد ثابت به اندازه‌ی کافی بزرگ $\bar{\gamma}$ چنان وجود دارد که دو نامساوی $\{\hat{\gamma}(t) \leq \bar{\gamma}\}$ و $\{\gamma \leq \bar{\gamma}\}$ برآورده می‌شوند.

برای مرحله‌ی دوم اثبات، خطای تخمینی $\hat{h}(t)$ به صورت عبارت $\{\hat{h}(t) \triangleq \hat{h}(t) - h\}$ تعریف گردیده است. با توجه به ثابت بودن مقدار h ، تساوی مشتقی $\{\hat{h}(t) = \dot{\hat{h}}(t)\}$ صریحاً نتیجه می‌شود. در ادامه با هدف خلاصه نویسی از نماد \hat{h} به جای $\hat{h}(t)$ استفاده خواهد شد. تابع کاندیدای لیاپانوف $V_2(t)$ به فرم $\{V_2(s(t), \tilde{\gamma}(t), \hat{h}(t)) \triangleq 0.5(s^T M s + \tilde{\gamma}^2 + \hat{h}^2)\}$ انتخاب می‌شود. بدیهی است که این تابع همواره مثبت بوده و $\{V_2(0_{3 \times 1}, 0, 0) = 0\}$ می‌باشد. مشتق‌گیری زمانی از کاندیدای لیاپانوف $V_2(t)$ ، عبارت $\{\dot{V}_2(t) = 0.5 s^T \dot{M} s + s^T M \dot{s} + \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}} + \hat{h} \dot{\hat{h}}\}$ را نتیجه می‌دهد. با جایگذاری $\{M \dot{s} = -C s - D s - Y \theta + R \tau + \Delta\}$ از سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی در $\dot{V}_2(t)$ ، رابطه‌ی (۳۵) به دست می‌آید.

$$\dot{V}_2(t) = 0.5 s^T \dot{M} s + s^T (-C s - D s - Y \theta + R \tau + \Delta) + \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}} + \hat{h} \dot{\hat{h}} \quad (35)$$

با استناد به دو قانون به‌روزرسانی $\{\hat{h}(t) = \|Y\| \|s(t)\|\}$ ، $\{\tilde{\gamma}(t) = \|s(t)\|\}$ ، عبارت $\dot{V}_2(t)$ به صورت (۳۵) مرتب می‌گردد.

$$\dot{V}_2(t) = 0.5 s^T (\dot{M} - 2C) s - s^T D s - s^T Y \theta + s^T R \tau + s^T \Delta + \tilde{\gamma} \|s\| + \hat{h} \|Y\| \|s\| \quad (36)$$

مشابه با استدلالی که در مرحله‌ی اول اثبات آورده شده است، به علت صفر بودن عبارت $\{0.5 s^T (\dot{M} - 2C) s\}$ و هم‌چنین منفی بودن عبارت $\{-s^T D s\}$ ، تساوی (۳۶) به نامساوی (۳۷) مبدل می‌شود.

$$\dot{V}_2(t) \leq \{-s^T Y \theta + s^T R \tau + s^T \Delta + \tilde{\gamma} \|s\| + \hat{h} \|Y\| \|s\|\} \quad (37)$$

با استناد به نامساوی $\{s^T \Delta \leq \gamma \|s\|\}$ ، اعمال بردار ورودی کنترلی (۲۱) به (۳۷) و ساده‌سازی بر اساس دو حقیقت ریاضی $\{s^T \text{sign}(s) = \sum_{i=1}^3 |s_i|\}$ و $\{-\sum_{i=1}^3 |s_i| \leq -\|s\|\}$ ، نامساوی (۳۸) قابل حصول است.

$$\dot{V}_2(t) \leq \{-s^T Y \theta - \lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\| + s^T Y \hat{\theta} + s^T U_{++}(t) + \tilde{h} \|Y\| \|s\|\} \quad (38)$$

چنانچه نامساوی کوشی شوآرتز بر روی دو عبارت $\{-s^T Y \theta\}$ و $\{s^T Y \hat{\theta}\}$ اعمال و فرض $\{\|\theta\| < h\}$ در نظر گرفته شود، آنگاه دو نامساوی $\{-s^T Y \theta \leq |s^T Y \theta| \leq \|s\| \|Y\| \|\theta\|\}$ و $\{s^T Y \hat{\theta} \leq |s^T Y \hat{\theta}| \leq \|s\| \|Y\| \|\hat{\theta}\|\}$ به دست می‌آیند. با جایگذاری دو نامساوی اخیر و عبارت $U_{++}(t)$ در (۳۸)، نامساوی (۳۹) نتیجه می‌گردد.

$$\dot{V}_2(t) \leq \{-\lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\| + (h - \tilde{h}) \|Y\| \|s\| + \tilde{h} \|Y\| \|s\|\} \quad (39)$$

با توجه به تعریف $\{\tilde{h}(t) \triangleq \hat{h}(t) - h\}$ ، (۳۹) به نامساوی ساده‌ی $\{\dot{V}_2(t) \leq -\lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\| \leq 0\}$ تبدیل می‌گردد. مشابه با استدلال انتهایی مرحله‌ی اول، چنانچه تعریف کاندیدای لیاپانوف $\dot{V}_2(t)$ و نامساوی $\{\dot{V}_2(t) \leq 0\}$ در نظر گرفته شوند، این نکته صریحاً استنتاج می‌شود که تابع خطای تخمینی $\tilde{h}(t)$ کراندار است. از آنجایی که h همواره ثابت است، می‌توان دریافت که تابع تخمینی $\hat{h}(t)$ نیز کراندار می‌باشد. حال اگر قانون به‌روزرسانی $\{\dot{\hat{h}}(t) = \|Y\| \|s\|\}$ در کنار رابطه‌ی حدی $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t)\| = 0\}$ قرار گیرد، مستقیماً رابطه‌ی حدی $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{h}(t) = h_{T^*}\}$ نتیجه می‌گردد که لزوماً h_{T^*} با مقدار اسمی ثابت نامعلوم h برابر نیست. در ادامه نشان داده خواهد شد که این رابطه‌ی حدی اخیر برای حالت $\{t \rightarrow T_{total}^*\}$ نیز برقرار و صادق می‌باشد. از آنجایی که $\hat{h}(t)$ همواره کراندار است، بدون از دست دادن کلیت می‌توان نتیجه گرفت که همواره عدد ثابت به اندازه‌ی کافی بزرگ \bar{h} چنان وجود دارد که دو نامساوی $\{\hat{h}(t) \leq \bar{h}\}$ و $\{h \leq \bar{h}\}$ برآورده می‌شوند.

در مرحله‌ی سوم اثبات، دو تابع زمانی اسکالری $\tilde{h}(t)$ و $\tilde{\gamma}(t)$ به صورت $\{\tilde{h}(t) \triangleq \hat{h}(t) - \bar{h}\}$ و $\{\tilde{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma}(t) - \bar{\gamma}\}$ تعریف می‌گردند. با توجه به دو نامساوی استخراجی قبلی، این نکته صریحاً دریافت می‌شود که $\tilde{h}(t)$ و $\tilde{\gamma}(t)$ دو تابع زمانی همواره منفی می‌باشند. علاوه بر این با توجه به ثابت بودن \bar{h} و $\bar{\gamma}$ ، دو رابطه‌ی مشتقی $\{\dot{\tilde{h}}(t) = \dot{\hat{h}}(t)\}$ و $\{\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t)\}$ نتیجه می‌شوند. در همین مرحله، تابع کاندیدای لیاپانوف $V_3(t)$ به صورت $\{V_3(s(t), \tilde{\gamma}(t), \tilde{h}(t)) \triangleq 0.5 (s^T(t) M s(t) + \frac{1}{\Omega} \tilde{\gamma}(t)^2 + \frac{1}{\Omega} \tilde{h}(t)^2)\}$ تعریف می‌گردد که Ω ضریب دلخواهی در بازه‌ی $\{0 < \Omega < 1\}$ است. کاندیدای لیاپانوف $V_3(t)$ ، تابعی همواره مثبت بوده و برای این تابع، تساوی $\{V_3(0_{3 \times 1}, 0, 0) = 0\}$ برقرار است. با مشتق‌گیری زمانی از کاندیدای لیاپانوف $V_3(t)$ ، عبارت $\{\dot{V}_3(t) = 0.5 s^T \dot{M} s + s^T M \dot{s} + \frac{1}{\Omega} \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{\Omega} \tilde{h} \dot{\tilde{h}}\}$ حاصل می‌شود. چنانچه روالی کاملاً یکسان و مشابه با روابط (۳۵) الی (۳۹) بر روی $\dot{V}_3(t)$ انجام پذیرد، نامساوی (۴۰) به دست می‌آید.

$$\dot{V}_3(t) \leq -\lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\| + h \|Y\| \|s\| + (\gamma - \hat{\gamma}) \|s\| + \|Y\| \|\hat{\theta}\| \|s\| + \Omega^{-1} \tilde{\gamma} \|s\| + \Omega^{-1} \tilde{h} \|Y\| \|s\| + s^T U_{++} \quad (40)$$

از آنجایی که $\{U_{++}(t) = -(\|\hat{\theta}\| + \hat{h}(t)) \|Y\| \text{sign}(s)\}$ می‌باشد، مشابه با مرحله‌ی دوم اثبات، می‌توان نامساوی $\{s^T U_{++} < -(\|\hat{\theta}\| + \hat{h}) \|Y\| \|s\|\}$ را استخراج کرد. با جایگذاری نامساوی اخیر در (۴۰) و در نظر گرفتن $\{h \leq \bar{h}\}$ و $\{\gamma \leq \bar{\gamma}\}$ ، نامساوی (۴۱) برای $\dot{V}_3(t)$ به دست می‌آید.

$$\dot{V}_3(t) \leq \{-\lambda \|s\|^2 - \zeta \|s\| + (\bar{h} - \hat{h}) \|Y\| \|s\| + (\bar{\gamma} - \hat{\gamma}) \|s\| + \Omega^{-1} \tilde{\gamma} \|s\| + \Omega^{-1} \tilde{h} \|Y\| \|s\|\} \quad (41)$$

با استناد به دو تعریف $\{\tilde{h}(t) \triangleq \hat{h}(t) - \bar{h}\}$ و $\{\tilde{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma}(t) - \bar{\gamma}\}$ ، نامساوی (۴۲) مستقیماً از (۴۱) نتیجه می‌شود.

$$\dot{V}_3(t) \leq \left\{ -\lambda \|\mathbf{s}\|^2 - \zeta \|\mathbf{s}\| + (\Omega^{-1} - 1) \tilde{\gamma} \|\mathbf{s}\| + (\Omega^{-1} - 1) \tilde{h} \|\mathbf{Y}\| \|\mathbf{s}\| \right\} \quad (۴۲)$$

از آنجایی که \tilde{h} و $\tilde{\gamma}$ دو تابع همواره منفی هستند، می‌توان از نمایش جایگزین $\{\tilde{h} = -|\tilde{h}|\}$ و $\{\tilde{\gamma} = -|\tilde{\gamma}|\}$ استفاده کرد. با تعریف دو عبارت $\{F_1 \triangleq (\Omega^{-1} - 1) \|\mathbf{s}\|\}$ و $\{F_2 \triangleq (\Omega^{-1} - 1) \|\mathbf{Y}\| \|\mathbf{s}\|\}$ ، نامساوی (۴۲) از (۴۲) استخراج می‌گردد. بدیهی است که هر سه عبارت سمت راست نامساوی (۴۲) منفی هستند و قطعاً $\{\dot{V}_3(t) \leq 0\}$ برقرار است.

$$\dot{V}_3(t) \leq \left\{ -\zeta \|\mathbf{s}\| - F_1 |\tilde{\gamma}| - F_2 |\tilde{h}| \right\} \quad (۴۳)$$

چنانچه در ویژگی ۵، بردار دلخواه \mathbf{A} را با بردار \mathbf{s} جایگزین کنیم، مستقیماً نامساوی $\{0 \leq \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{M}) \|\mathbf{s}\|^2\}$ به دست می‌آید که با اندکی محاسبات ریاضی می‌توان آن را به فرم $\{-\|\mathbf{s}\| \leq \frac{-(\mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s})^{0.5}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{M})}}\}$ نمایش داد. از آنجایی که ضریب دلخواه Ω در بازه‌ی $\{0 < \Omega < 1\}$ قرار داشت، می‌توان طرف راست نامساوی اخیر را در $\sqrt{\Omega}$ ضرب کرد. حال اگر نامساوی $\left\{ -\|\mathbf{s}\| \leq \frac{-\sqrt{\Omega}(\mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s})^{0.5}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{M})}} \right\}$ به طرف راست (۴۳) اعمال گردیده و نماد ξ به صورت $\left\{ \xi \triangleq \min \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{M})}}, F_1, F_2 \right) \right\}$ تعریف شود، نامساوی ساده شده‌ی (۴۴) به دست می‌آید.

$$\dot{V}_3(t) \leq -\xi \left(\sqrt{\Omega} (\mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s})^{0.5} + |\tilde{\gamma}| + |\tilde{h}| \right) \quad (۴۴)$$

با ضرب و تقسیم مناسب Ω در طرف راست نامساوی (۴۴)، نامساوی (۴۵) منتج می‌شود.

$$\dot{V}_3(t) \leq -\xi \sqrt{2\Omega} \left(\frac{(\mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s})^{0.5}}{\sqrt{2}} + \frac{|\tilde{\gamma}|}{\sqrt{2\Omega}} + \frac{|\tilde{h}|}{\sqrt{2\Omega}} \right) \quad (۴۵)$$

با انتخاب $\mathcal{K} = 3$ در لم ۵، نامساوی $\{-(|a_1| + |a_2| + |a_3|) \leq -\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\}$ بدست می‌آید. اگر a_1, a_2 و a_3 به صورت $\left\{ a_1 \triangleq \frac{(\mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s})^{0.5}}{\sqrt{2}} \right\}$ ، $\left\{ a_2 \triangleq \frac{|\tilde{\gamma}|}{\sqrt{2\Omega}} \right\}$ و $\left\{ a_3 \triangleq \frac{|\tilde{h}|}{\sqrt{2\Omega}} \right\}$ انتخاب شوند، آنگاه با استناد به همین نامساوی لم ۵، می‌توان (۴۵) را به صورت (۴۶) بازنویسی کرد.

$$\dot{V}_3(t) \leq -\sqrt{2\Omega} \xi \left(\sqrt{0.5 \left(\mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s} + \frac{1}{\Omega} \tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{\Omega} \tilde{h}^2 \right)} \right) \quad (۴۶)$$

با در نظر گرفتن تعریف $V_3(t)$ ، نامساوی (۴۶) به فرم ساده شده‌ی $\{\dot{V}_3(t) \leq -\sqrt{2\Omega} \xi (\sqrt{V_3(t)})\}$ تبدیل می‌گردد. با تعریف $\{\rho_1 \triangleq \sqrt{2\Omega} \xi\}$ ، $\{\rho_2 \triangleq 0.5\}$ و استفاده‌ی مستقیم از لم ۱ صریحاً می‌توان نتیجه گرفت که $V_3(t)$ و بردار $\mathbf{s}(t)$ پس از گذشت زمان متناهی T_{reaching}^* دقیقاً صفر می‌شوند و برای لحظات $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ همواره صفر باقی می‌مانند. هم‌چنین با استفاده از لم ۱ می‌توان نامساوی (۲۳) را برای مشخص کردن زمان متناهی T_{reaching}^* به دست آورد. بنابراین برای زمان‌های $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی وسیله‌ی دریایی (۱۷) به دینامیک مد لغزشی $\{\mathbf{s}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ تبدیل می‌گردد. با استناد به تعریف خمینه‌های لغزشی (۱۹)، دینامیک مد لغزشی $\{\mathbf{s}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ به صورت رابطه‌ی (۴۷) نتیجه می‌شود که از سه زیرسیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم مستقل از هم تشکیل گردیده است.

$$\begin{cases} \dot{e}_{2i-1}(t) = e_{2i} \\ \dot{e}_{2i} = -l_{1i} \text{sign}(e_{2i-1}) - l_{2i} \text{sign}(e_{2i}) \end{cases} \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (۴۷)$$

برای مرحله‌ی چهارم اثبات باید نشان داده شود سیستم دینامیک مد لغزشی $\{\mathbf{s}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ که به صورت (۴۷) بدست آمده، دارای پایداری زمان-متناهی کلی با زمان متناهی همگرایی T_{settling}^* است. در صورت اثبات این ادعا، می‌توان فهمید تمامی

خطاهای ردیابی وسیله‌ی دریایی که برای لحظات $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ بر روی دینامیکی مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ قرار گرفته‌اند و از معادلات دیفرانسیلی (۴۷) تبعیت می‌کنند، پس از گذشت مدت زمان متناهی دیگری به نام T_{settling}^* دقیقاً به صفر می‌رسند. چنانچه هر کدام از سه زیرسیستم غیرخطی مستقل (۴۷) با سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم لم ۲ مقایسه گردند، صریحاً پایداری زمان-متناهی کلی سیستم دینامیک مد لغزشی (۴۷) با زمان متناهی همگرایی T_{settling}^* نتیجه می‌شود. علاوه بر این، با استناد به نامساوی موجود در لم ۲، می‌توان به سهولت نشان داد که کران بالای زمان متناهی همگرایی T_{settling}^* با استفاده از نامساوی (۲۴) قابل محاسبه است. با در نظر گرفتن مراحل چهارگانه‌ی اثبات، می‌توان فهمید که با اعمال بردار ورودی‌های کنترلی (۲۱) به وسیله‌ی دریایی خودکار (۱۲)، هدف ردیابی زمان-متناهی (۱۵) بعد از گذشت زمان همگرایی مطلق $\{T_{\text{total}}^* \leq (T_{\text{reaching}}^* + T_{\text{settling}}^*)\}$ به طور کامل برآورده می‌گردد. بنابراین اثبات قضیه ۱ در اینجا به پایان می‌رسد. ■

یادآوری ۴. برای دومین ساختار کنترلی غیرخطی پیشنهادی، بردار خمینه‌های لغزشی $s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ به صورت (۴۸) تعریف می‌شود که ضریب توانی q عددی دلخواه در بازه‌ی $\{0 < q < 1\}$ است. بردار ورودی‌های کنترلی $\{\tau(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ و قوانین به‌روزرسانی دقیقاً مطابق با همان رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) خواهند بود.

$$\begin{cases} s(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ s_3(t)]^T \triangleq \dot{\eta}(t) - K(t) \\ K(t) = [k_1(t) \ k_2(t) \ k_3(t)]^T = \dot{\eta}_d(t) - E_1(t) - E_2(t) \\ E_1(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t |e_2(v)|^q \text{sign}(e_2(v)) dv \\ \int_0^t |e_4(v)|^q \text{sign}(e_4(v)) dv \\ \int_0^t |e_6(v)|^q \text{sign}(e_6(v)) dv \end{bmatrix}, E_2(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t \text{sig}^{q(2-q)^{-1}}(\ell_1(e_1(v), e_2(v))) dv \\ \int_0^t \text{sig}^{q(2-q)^{-1}}(\ell_2(e_3(v), e_4(v))) dv \\ \int_0^t \text{sig}^{q(2-q)^{-1}}(\ell_3(e_5(v), e_6(v))) dv \end{bmatrix} \\ \text{sig}^{q(2-q)^{-1}}(\ell_i(e_{2i-1}, e_{2i})) \triangleq |\ell_i(e_{2i-1}, e_{2i})|^{q(2-q)^{-1}} \text{sign}(\ell_i(e_{2i-1}, e_{2i})) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \\ \ell_i(e_{2i-1}, e_{2i}) \triangleq e_{2i-1}(t) + (2-q)^{-1} |e_{2i}(t)|^{2-q} \text{sign}(e_{2i}(t)) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (48)$$

قضیه ۲. با در نظر گرفتن بردار خمینه‌های لغزشی (۴۸) و اعمال بردار ورودی‌های کنترلی (۲۱) به وسیله‌ی دریایی خودکار (۱۲)، پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی تضمین شده و بردار وضعیت $\eta(t)$ برای لحظه‌های $\{t \geq T_{\text{total}}^*\}$ دقیقاً به بردار مسیر مورد نظر $\eta_d(t)$ می‌رسد که $\{T_{\text{total}}^* \leq (T_{\text{reaching}}^* + T_{\text{settling}}^*)\}$ است. بنابراین اهداف ردیابی زمان-متناهی (۱۵) و (۱۸) برآورده می‌شوند. علاوه بر این، زمان متناهی همگرایی T_{reaching}^* با همان نامساوی (۲۳) و زمان متناهی همگرایی T_{settling}^* با نامساوی (۴۹) تعیین می‌گردند که ضرایب اختیاری ϑ_{2i} و ϑ_{1i} در بازه‌های $\{0 < \vartheta_{1i} < 1\}$ و $\{1 < \vartheta_{2i} < \infty\}$ قرار دارند. ■

$$\begin{cases} T_{\text{settling}}^* = \max_i(T_{S_i}) \quad \text{with } i = 1, 2, 3. \\ T_{S_i} \leq (\omega_i(1-q))^{-1} (3-q) \left(\mathfrak{B}_i(e_{2i-1}(t = T_{\text{reaching}}^*), e_{2i}(t = T_{\text{reaching}}^*)) \right)^{\frac{1-q}{3-q}} \\ \mathfrak{B}(e_{2i-1}, e_{2i}) \triangleq \frac{2-q}{3-q} |\ell_i(e_{2i-1}, e_{2i})|^{\frac{3-q}{2-q}} + \vartheta_{1i} e_{2i}(t) \ell_i(e_{2i-1}, e_{2i}) + \frac{\vartheta_{2i}}{3-q} |e_{2i}(t)|^{3-q} \\ \omega_i \triangleq - \left(\max_{(e_{2i-1}, e_{2i}) \in \Xi_i} \mathfrak{B}_i(e_{2i-1}, e_{2i}) \right) \quad \text{with } \Xi_i = \{(e_{2i-1}, e_{2i}) : \mathfrak{B}_i(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1\} \end{cases} \quad (49)$$

اثبات ۲. فرآیند این اثبات شامل چهار مرحله بوده که سه مرحله‌ی ابتدایی آن کاملاً با مراحل آغازین اثبات قضیه ۱ یکسان هستند. بنابراین به منظور جلوگیری از تکرار و خلاصه‌نویسی، از آوردن آن‌ها خودداری شده است. در سه مرحله‌ی ابتدایی نشان داده می‌شود که با در نظر گرفتن بردار خمینه‌های لغزشی (۴۸) و اعمال ورودی‌های کنترلی (۲۱) به وسیله‌ی دریایی خودکار (۱۲)، معادلات دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) پس از گذشت زمان متناهی T_{reaching}^* به دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ تبدیل

می‌شوند. این دینامیک مد لغزشی در رابطه‌ی (۵۰) آورده شده که متشکل از سه زیرسیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم بدون اندرکنش است. برای مرحله‌ی چهارم این اثبات باید پایداری زمان-متناهی کلی سیستم دینامیک مد لغزشی (۵۰) نشان داده شود.

$$\begin{cases} \dot{e}_{2i-1}(t) = e_{2i}(t) \\ \dot{e}_{2i}(t) = -|e_{2i}(t)|^{\rho} \text{sign}(e_{2i}(t)) - \text{sig}^{\rho(2-\rho)^{-1}}(\ell_i(e_{2i-1}(t), e_{2i}(t))) \\ \text{sig}^{\rho(2-\rho)^{-1}}(\ell_i(e_{2i-1}, e_{2i})) \triangleq |\ell_i(e_{2i-1}, e_{2i})|^{\rho(2-\rho)^{-1}} \text{sign}(\ell_i(e_{2i-1}, e_{2i})) \\ \ell_i(e_{2i-1}, e_{2i}) \triangleq e_{2i-1}(t) + (2 - \rho)^{-1} |e_{2i}(t)|^{2-\rho} \text{sign}(e_{2i}(t)) \end{cases} \quad \text{with } i = 1, 2, 3 \quad (50)$$

چنانچه سیستم غیرخطی لم ۳ با هر کدام از زیرسیستم‌های مرتبه‌ی دوم (۵۰) مقایسه گردد، پایداری زمان-متناهی کلی سیستم دینامیکی مد لغزشی (۵۰) به طور صریح نتیجه می‌شود. بنابراین خطاهای ردیابی قرار گرفته بر روی دینامیک مد لغزشی (۵۰) پس از گذشت زمان متناهی T_{settling}^* دقیقاً صفر می‌شوند. شایان ذکر است که کران بالای زمان متناهی T_{settling}^* با نامساوی (۴۹) تعیین می‌گردد. با توجه به مراحل ذکرشده، بدیهی است هدف ردیابی زمان-متناهی وسیله‌ی دریایی برای $\{t \geq T_{\text{total}}^*\}$ برآورده می‌شود که زمان همگرایی مطلق T_{total}^* در $\{T_{\text{total}}^* \leq (T_{\text{reaching}}^* + T_{\text{settling}}^*)\}$ صدق می‌کند. اثبات قضیه ۲ در اینجا به اتمام می‌رسد. ■

یادآوری ۵. برای سومین ساختار کنترلی پیشنهادی، بردار خمینه‌های لغزشی $s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ به صورت (۵۱) ارائه شده که σ_{2i} ها (برای $\{i = 1, 2, 3\}$) ضرایب توانی اختیاری در بازه‌ی $\{0 < \sigma_{2i} < 1\}$ می‌باشند. سپس ضرایب توانی σ_{2i-1} (برای $\{i = 1, 2, 3\}$) با استفاده از تساوی $\{\sigma_{2i-1} = \frac{\sigma_{2i}}{2-\sigma_{2i}}\}$ تعیین شده‌اند. علاوه بر این، ضرایب مثبت $\{\varepsilon_{2i-1}, \varepsilon_{2i}\}$ (برای $\{i = 1, 2, 3\}$) چنان انتخاب گردیده‌اند که ریشه‌های چندجمله‌ای $\{Z^2 + \varepsilon_{2i}Z^1 + \varepsilon_{2i-1} = 0\}$ دارای قسمت‌های حقیقی منفی باشند. برای ساختار کنترلی سوم، بردار ورودی‌های کنترلی $\{u(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ و قوانین به‌روزرسانی با استفاده از روابط (۲۱) و (۲۲) تعیین می‌گردند.

$$\begin{cases} s(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad s_3(t)]^T \triangleq \dot{\eta}(t) - K(t) \\ K(t) = [k_1(t) \quad k_2(t) \quad k_3(t)]^T = \dot{\eta}_d(t) - E_1(t) - E_2(t) \\ E_1(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t \varepsilon_1 \text{sig}^{\sigma_1}(e_1(v)) dv \\ \int_0^t \varepsilon_3 \text{sig}^{\sigma_3}(e_3(v)) dv \\ \int_0^t \varepsilon_5 \text{sig}^{\sigma_5}(e_5(v)) dv \end{bmatrix}, E_2(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t \varepsilon_2 \text{sig}^{\sigma_2}(e_2(v)) dv \\ \int_0^t \varepsilon_4 \text{sig}^{\sigma_4}(e_4(v)) dv \\ \int_0^t \varepsilon_6 \text{sig}^{\sigma_6}(e_6(v)) dv \end{bmatrix} \\ \text{sig}^{\sigma_{2i-1}}(e_{2i-1}(t)) \triangleq |e_{2i-1}(t)|^{\sigma_{2i-1}} \text{sign}(e_{2i-1}(t)) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \\ \text{sig}^{\sigma_{2i}}(e_{2i}(t)) \triangleq |e_{2i}(t)|^{\sigma_{2i}} \text{sign}(e_{2i}(t)) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (51)$$

قضیه ۳. چنانچه بردار ورودی‌های کنترلی (۲۱) و قوانین به‌روزرسانی (۲۲) با استفاده از بردار خمینه‌های لغزشی (۵۱) تشکیل شوند و به وسیله‌ی دریایی خودکار (۱۲) اعمال گردند، آنگاه برای سیستم حلقه‌بسته، پایداری زمان-متناهی کلی فراهم می‌گردد و بردار وضعیت $\eta(t)$ برای زمان‌های $\{t \geq T_{\text{total}}^*\}$ دقیقاً به بردار $\eta_d(t)$ می‌رسد که $\{T_{\text{total}}^* \leq (T_{\text{reaching}}^* + T_{\text{settling}}^*)\}$ است. دو زمان متناهی T_{reaching}^* و T_{settling}^* به ترتیب با استفاده از نامساوی‌های (۲۳) و (۵۲) تعیین می‌گردند. در نامساوی اخیر (۵۲)، $\{\mathcal{P}_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ و $\{Q_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ (برای $\{i = 1, 2, 3\}$) ماتریس‌های مثبت معین متقارن اختیاری می‌باشند که معادله‌ی ماتریسی لیاپانوف $\{\mathcal{P}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T \mathcal{P}_i = -Q_i\}$ را برآورده می‌سازند. □

$$\begin{cases} T_{\text{settling}}^* = \max_i(T_{S_i}) \quad \text{with } i = 1, 2, 3. \\ T_{S_i} \leq \sigma_{2i} \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathcal{P}_i)}{\lambda_{\min}(Q_i)} \right) \left(\frac{\tilde{\gamma}^{\frac{1-\sigma_{2i}}{\sigma_{2i}}}(3_i(t=0))}{1-\sigma_{2i}} \right) \quad \text{where } 3_i(t) = [e_{2i-1}^{\sigma_{2i-1}}(t), e_{2i}^{\sigma_{2i}}(t)]^T \\ \tilde{\gamma}(3_i(t)) = 3_i(t)^T \mathcal{P}_i 3_i(t) \quad \text{and } \mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_{2i-1} & -\varepsilon_{2i} \end{bmatrix} \quad \text{with } i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (52)$$

اثبات ۳. مشابه با اثبات قضایای قبلی، این اثبات نیز متشکل از چهار مرحله‌ی اساسی است. با انجام سه مرحله‌ی ابتدایی (مشابه با مراحل آغازین اثبات‌های قبل)، به صورت تحلیلی نشان داده می‌شود که اعمال ساختار کنترلی پیشنهادی سوم به وسیله‌ی دریایی، سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) را برای $\{t \geq T_{reaching}^*\}$ به دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ می‌سازد و کران بالای زمان منتهای $T_{reaching}^*$ با نامساوی (۲۳) مشخص می‌گردد. دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ به صورت سه زیرسیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم مستقل از هم (۵۳) حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} \dot{e}_{2i-1}(t) = e_{2i}(t) \\ \dot{e}_{2i}(t) = -\varepsilon_{2i-1} \text{sig}^{\sigma_{2i-1}}(e_{2i-1}(t)) - \varepsilon_{2i} \text{sig}^{\sigma_{2i}}(e_{2i}(t)) \end{cases} \text{ for } i = 1, 2, 3 \quad (53)$$

برای مرحله‌ی چهارم اثبات، باید هر کدام از سه زیرسیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم (۵۳) به صورت جداگانه با سیستم غیرخطی موجود در لم ۴ مقایسه شوند. با انجام این استدلال قیاسی، پایداری زمان-منتهای کلی دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}\}$ صریحاً نتیجه می‌گردد. بنابراین تمام خطاهای ردیابی $e_{2i}(t)$ و $e_{2i-1}(t)$ که برای $\{t \geq T_{reaching}^*\}$ از معادلات دینامیکی (۵۳) پیروی می‌کنند، پس از گذشت زمان منتهای دیگری به نام $T_{settling}^*$ به صفر واقعی همگرا شده و همواره صفر باقی می‌مانند. با استفاده‌ی مستقیم از نامساوی لم ۴، می‌توان نتیجه گرفت که کران بالای زمان منتهای $T_{settling}^*$ با (۵۲) تعیین می‌شود. جمع‌بندی مراحل چهارگانه‌ی فوق نشان می‌دهد که برای لحظه‌های $\{t \geq T_{total}^*\}$ هدف ردیابی زمان-منتهای وسیله‌ی دریایی برآورده می‌شود. علاوه بر این، زمان همگرایی مطلق T_{total}^* همواره در نامساوی $\{T_{total}^* \leq (T_{settling}^* + T_{reaching}^*)\}$ صدق می‌کند. اثبات قضیه ۳ در اینجا به پایان می‌رسد. ■

یادآوری ۶. باید توجه داشت در هر سه راهکار کنترلی پیشنهادی، چندین ثابت دلخواه (به صورت ضرایب عددی یا توانی) وجود دارند که مقادیر این ثابت‌های دلخواه تاثیر بسزایی بر روی شاخصه‌های کیفی پاسخ گذرای سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی خواهند داشت. بنابراین پیشنهاد می‌گردد که با تعریف یک تابع هزینه معقول و حل مسئله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی دارای محدودیت، مقادیر مناسبی برای ثابت‌های دلخواه فوق‌الذکر انتخاب شوند.

یادآوری ۷. برای هر سه راهکار کنترلی پیشنهادی، تمرکز بر روی نامساوی‌های استخراجی مرتبط با دو زمان منتهای $T_{reaching}^*$ و $T_{settling}^*$ نشان می‌دهد که زمان همگرایی مطلق $\{T_{total}^* \leq (T_{settling}^* + T_{reaching}^*)\}$ وابستگی غیرخطی شدیدی به شرایط اولیه‌ی وسیله‌ی دریایی و مقادیر ثابت‌های آزاد موجود در خمینه‌های لغزشی و ورودی‌های کنترلی دارند.

۶- نتایج شبیه‌سازی برای ساختار کنترلی ترکیبی پیشنهادی

در این مقاله برای انجام شبیه‌سازی‌ها، از مدل کشتی Cybership II (موجود در مرجع [۱]) استفاده می‌گردد که معادلات دینامیکی آن از رابطه‌ی (۱۲) تبعیت می‌کند. کشتی آزمایشگاهی Cybership II متعلق به آزمایشگاه سایبرنتیک دریایی دانشگاه NTNU کشور نروژ بوده و ثابت‌های فیزیکی این کشتی و مقادیرشان همگی در مرجع [۱] ارائه گردیده‌اند. باید توجه داشت که از این ثابت‌ها برای ساخت مدل دینامیکی کشتی Cybership II در محیط شبیه‌سازی نرم‌افزار MATLAB استفاده شده، اما در ضابطه‌ی بردار خمینه‌های لغزشی $\{s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ و بردار ورودی‌های کنترلی $\{\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ مقادیر این ثابت‌های فیزیکی نامعلوم لحاظ شده‌اند. در تمام شبیه‌سازی‌ها، بردار عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش (۵۴) $\{\Delta \in \mathbb{R}^{3 \times 1}\}$ به مدل دینامیکی کشتی Cybership II اضافه شده است. با یک بررسی ساده می‌توان متوجه شد که نرم اقلیدسی بردار Δ همواره نامساوی $\{\|\Delta\| \leq \gamma = \sqrt{6}\}$ را برآورده

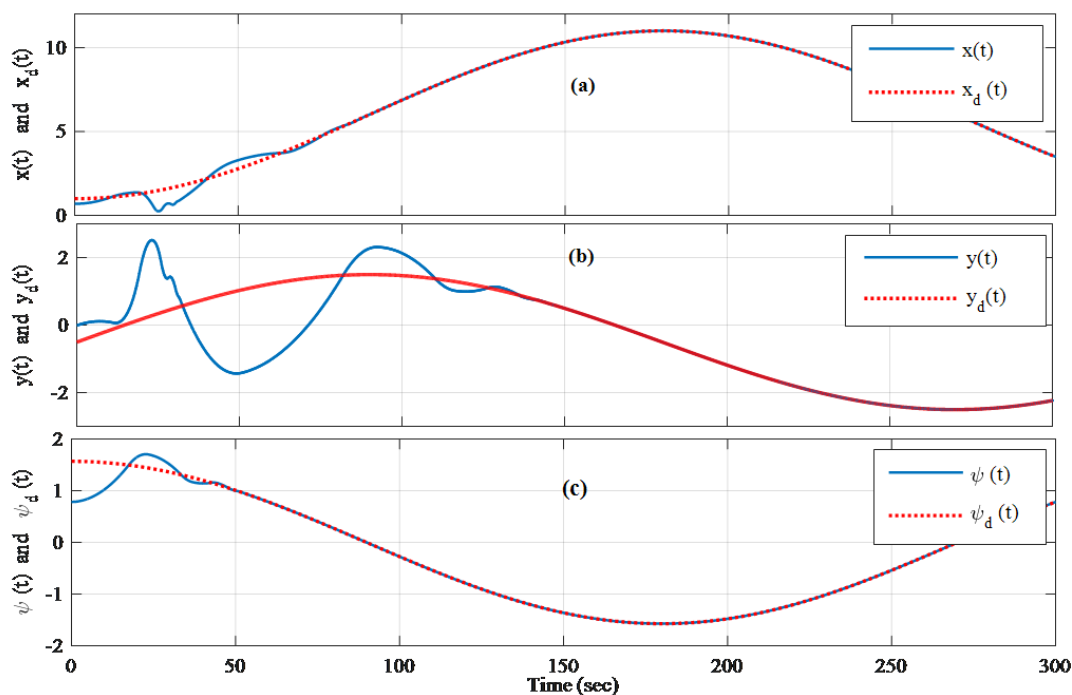
می‌سازد. مطابق با فرض ۱، مقدار γ نامعلوم لحاظ شده و نمی‌توان از آن مستقیماً در ضابطه‌ی بردار ورودی‌های کنترلی استفاده کرد. برای ساخت بردار $s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ (مطابق با روابط (۱۹) و (۲۰))، مقادیر ثابت‌های اختیاری به صورت $\{l_{11} = l_{12} = l_{13} = 0.01\}$ و $\{l_{21} = l_{22} = l_{23} = 0.005\}$ انتخاب گردیده‌اند که شرایط مورد نیاز $\{l_{11} > l_{21} > 0\}$ ، $\{l_{12} > l_{22} > 0\}$ و $\{l_{13} > l_{23} > 0\}$ را برآورده می‌سازند.

$$\begin{cases} \Delta_{3 \times 1} = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3]^T \\ \Delta_1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{90}t\right), \Delta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{90}t\right), \Delta_3 = \sin\left(\frac{\pi}{90}t\right) \end{cases} \quad (54)$$

در شبیه‌سازی‌ها، مقادیر ضرایب اختیاری موجود در بردار ورودی‌های کنترلی (۲۱)، $\{\zeta = \lambda = 1\}$ انتخاب شده‌اند. ماتریس وزن‌دهی $\Gamma \in \mathbb{R}^{20 \times 20}$ که در قوانین به‌روزرسانی (۲۲) وجود دارد، به صورت ماتریس همانی با درایه‌های قطر اصلی ۰٫۴۵، لحاظ گردیده است. در پیوست این مقاله، فرم رگرسوری خطی در پارامتر برای کشتی Cybership II آورده شده است. دو بردار شرایط اولیه‌ی $\eta(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ و $\hat{\eta}(0) = [0.7 \ 0 \ \frac{\pi}{4}]^T$ برای مدل کشتی Cybership II، منظور شده‌اند. علاوه بر این، شرایط اولیه‌ی لازم برای معادلات دیفرانسیلی مرتبط با قوانین به‌روزرسانی تطبیقی به شرح $\{\hat{\theta}(t=0) = \mathbf{0}_{20 \times 1}\}$ ، $\{\hat{\gamma}(t=0) = 0\}$ و $\{\hat{h}(t=0) = 0\}$ انتخاب گردیده‌اند. بردار مسیرهای مورد نظر $\eta_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ \psi_d(t)]^T$ به صورت رابطه‌ی (۵۵) تعیین شده است.

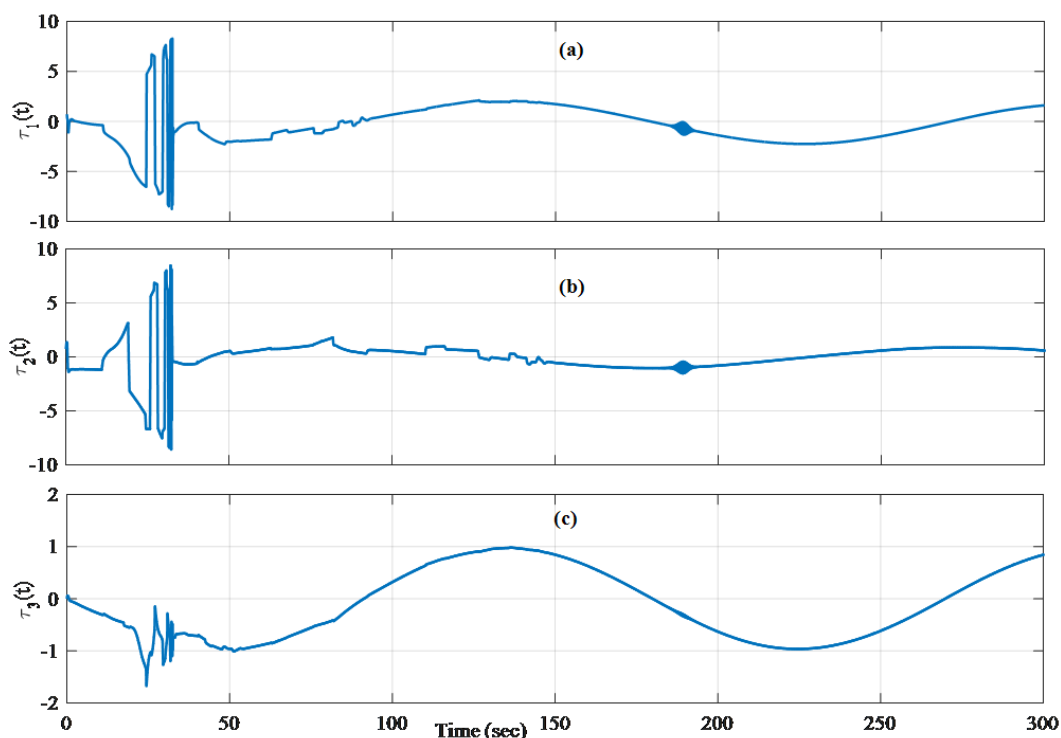
$$\begin{cases} x_d(t) = 6 - 5 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), \dot{x}_d(t) = \frac{\pi}{36} \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right), \ddot{x}_d(t) = \frac{\pi^2}{6480} \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right) \\ y_d(t) = -0.5 + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right), \dot{y}_d(t) = \frac{\pi}{90} \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), \ddot{y}_d(t) = \frac{-\pi^2}{16200} \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right) \\ \psi_d(t) = 0.5\pi \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), \dot{\psi}_d(t) = \frac{-\pi^2}{360} \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right), \ddot{\psi}_d(t) = \frac{-\pi^3}{64800} \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right) \end{cases} \quad (55)$$

در شکل ۲، که از سه قسمت (a)، (b) و (c) تشکیل شده، پاسخ‌های زمانی مرتبط با متغیرهای بردار وضعیت کشتی Cybership II $\eta(t) = [x(t) \ y(t) \ \psi(t)]^T$ به همراه مسیرهای مورد نظرشان $\eta_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ \psi_d(t)]^T$ نمایش داده شده‌اند. با دقت در قسمت‌های (a)، (b) و (c) شکل ۲ می‌توان دید که بعد از سپری شدن زمان‌های متناهی، متغیرهای وضعیت کشتی به طور دقیق (با خطای ردیابی صفر مطلق) به مسیرهای مورد نظر رسیده‌اند. پاسخ‌های زمانی مرتبط با ورودی‌های کنترلی اعمالی به کشتی Cybership II یعنی $\tau_1(t)$ ، $\tau_2(t)$ و $\tau_3(t)$ در شکل ۳ به تصویر کشیده شده‌اند. علاوه بر این، پاسخ زمانی مرتبط با نرم اقلیدسی بردار تخمینی ثابت‌های فیزیکی نامعلوم یعنی $\|\hat{\theta}(t)\|$ در شکل ۴ نمایش داده شده است. باید توجه داشت که نمودار زمانی $\|\hat{\theta}(t)\|$ بر اساس قانون به‌روزرسانی (۲۲) به دست آمده است. با دقت در این شکل می‌توان دید پاسخ زمانی $\|\hat{\theta}(t)\|$ بعد از سپری شدن زمان متناهی به یک مقدار دقیقاً ثابت رسیده که لزوماً با مقدار ثابت نامعلوم $\|\theta\|$ یکسان نیست. برای بردار عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش فرض $\{\|\Delta\| \leq \gamma\}$ در نظر گرفته شد که γ ثابتی نامعلوم بود. پاسخ زمانی مرتبط با تخمین این ثابت نامعلوم (یعنی پاسخ زمانی $\hat{\gamma}(t)$)، در قسمت (a) شکل ۵ نشان داده شده که با قانون به‌روزرسانی (۲۲) به دست می‌آید. با دقت در قسمت (a) شکل ۵ می‌توان دریافت که پاسخ زمانی $\hat{\gamma}(t)$ بعد از سپری شدن زمان متناهی دقیقاً به مقدار ثابتی رسیده است. لازم به ذکر است که مقدار حالت ماندگار پاسخ زمانی $\hat{\gamma}(t)$ لزوماً با مقدار ثابت نامعلوم γ برابر نیست. در فرض ۴ برای بردار ثابت‌های فیزیکی نامعلوم (یعنی بردار θ) فرض شد که همواره نامساوی $\{\|\theta\| \leq h\}$ برقرار بوده و h کرانی ثابت و نامعلوم است. چنانچه از قانون به‌روزرسانی (۲۲) برای تخمین این کران ثابت استفاده شود، آنگاه پاسخ زمانی تابع تخمینی $\hat{h}(t)$ به صورت قسمت (b) شکل ۵ حاصل می‌شود.

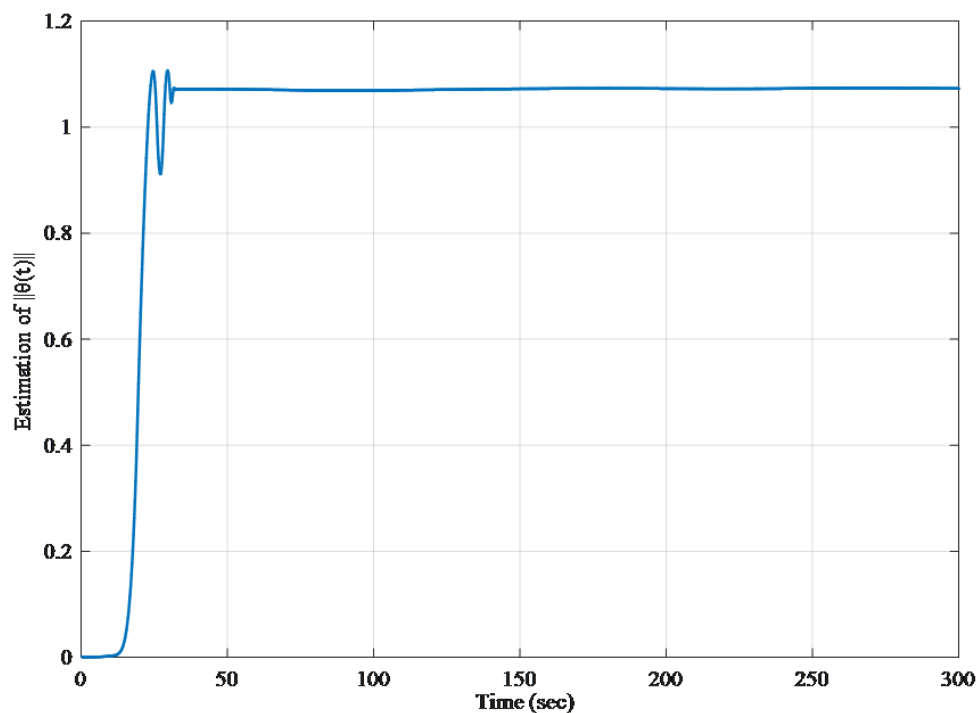


شکل ۲. پاسخ‌های زمانی متغیرهای کشتی و مسیرهای مورد نظر، (a): پاسخ‌های زمانی متغیر $x(t)$ و $x_d(t) = 6 - 5 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right)$ ؛ (b): پاسخ‌های زمانی متغیر $y(t)$ و $y_d(t) = -0.5 + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{180}\right)$ ؛ (c): پاسخ‌های زمانی متغیر $\psi(t)$ و $\psi_d(t) = 0.5 \pi \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right)$

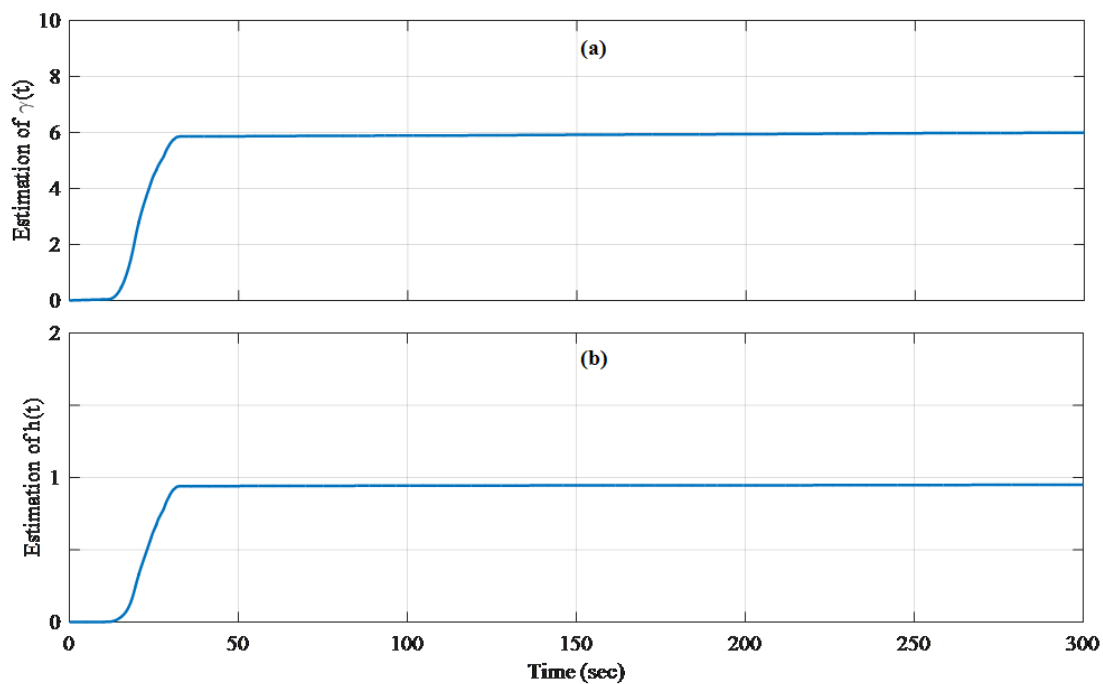
از مشاهده‌ی دقیق قسمت (b) شکل ۵ این نکته استخراج می‌گردد که تابع $\hat{h}(t)$ پس از گذشت مدت زمان متناهی به یک مقدار دقیقاً ثابت همگرا می‌گردد. بدیهی است که مقدار ثابت حالت ماندگار تابع $\hat{h}(t)$ با مقدار ثابت نامعلوم h لزوماً برابر و یکسان نمی‌باشد.



شکل ۳. پاسخ‌های زمانی ورودی‌های کنترلی اعمالی به کشتی Cybership II، (a): پاسخ‌های زمانی ورودی کنترلی $\tau_1(t)$ ؛ (b): پاسخ‌های زمانی ورودی کنترلی $\tau_2(t)$ ؛ (c): پاسخ‌های زمانی ورودی کنترلی $\tau_3(t)$



شکل ۴. پاسخ زمانی نرم اقلیدسی بردار تخمینی ثابت های فیزیکی نامعلوم کشتی Cybership II (یعنی پاسخ زمانی $\|\hat{\theta}(t)\|$)



شکل ۵. پاسخ های زمانی دو تابع تخمینی اسکالری $\hat{\gamma}(t)$ و $\hat{h}(t)$: (a) پاسخ زمانی تابع تخمینی $\hat{\gamma}(t)$ به منظور تخمین ثابت نامعلوم γ : (b) پاسخ زمانی تابع تخمینی $\hat{h}(t)$ به منظور تخمین ثابت نامعلوم h

۷- نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای کارهای تحقیقاتی آتی

در این مقاله، مدل جامعی برای وسیله‌ی دریایی سه درجه آزادی تحریک کامل در حضور ثابت‌های فیزیکی نامعلوم، عدم قطعیت مدل‌سازی، نیروهای ناشناخته‌ی محیطی و اغتشاش معرفی گردید. از آنجایی که تعدادی از عبارات‌های موجود در مدل وسیله‌ی دریایی، حاوی ثابت‌های فیزیکی نامعلوم بودند، فرم رگرسوری خطی در پارامتر برای توصیف آن‌ها استخراج شد. برای برآورده ساختن هدف ردیابی و تضمین پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته‌ی وسیله‌ی دریایی، راهکار کنترلی ترکیبی نوآورانه‌ای پیشنهاد گردید. با استفاده از روش کنترل مد لغزشی پایاندار (تعریف خمینه‌های لغزشی نوآورانه) و ترکیب آن با کنترل تطبیقی (تعریف قوانین به‌روزرسانی زمان-متناهی)، چندین نوع کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم-تطبیقی طراحی و پیشنهاد گردیدند تا وسیله‌ی دریایی بعد از گذشت زمان متناهی قابل تنظیمی دقیقاً به مسیر مورد نظر همگرا گردد. بر اساس تحلیل پایداری زمان-متناهی کلی وسیله‌ی دریایی، زمان همگرایی مطلق به شرایط اولیه‌ی سیستم و ضرایب اختیاری موجود در راهکار کنترلی وابستگی غیرخطی شدیدی دارد. نتایج شبیه‌سازی بر روی کشتی سه درجه آزادی Cybership II نشان داد که رهیافت کنترلی غیرخطی پیشنهادی می‌تواند هدف ردیابی زمان-متناهی مسیر مورد نظر را به خوبی برآورده سازد. به عنوان نتیجه‌ی اصلی مقاله می‌توان به این نکته اشاره داشت که روش کنترل مد لغزشی معمولی با خمینه‌های لغزشی خطی هرگز قادر به تضمین پایداری زمان-متناهی نمی‌باشد و شرط لازم (اما نه کافی) برای فراهم ساختن این نوع پایداری، تعریف تلفیقی خمینه‌های لغزشی خطی و غیرخطی است. در راستای موضوع پژوهشی مقاله‌ی کنونی، می‌توان چندین پیشنهاد برای کارهای تحقیقاتی آتی به صورت فهرست‌وار ارائه داد: (الف) در مقاله‌ی حاضر فرض شد که ورودی‌های کنترلی وسیله‌ی دریایی تحت تاثیر هیچ نوع غیرخطی‌گری نبوده، اما در پیاده‌سازی عملی به دلیل استفاده از عملگرهایی هم‌چون موتور همواره محدودیت‌هایی مانند اشباع یا ناحیه‌ی مرده وجود دارد. بنابراین به عنوان اولین کار پیشنهادی آینده می‌توان اثر غیرخطی‌سازهای اشباع و ناحیه‌ی مرده را در فرآیند طراحی بردار ورودی کنترلی وسیله‌ی دریایی در نظر گرفت. یکی از راهکارهای پیشنهادی برای حل چالش غیرخطی‌سازهای مذکور، استفاده از شبکه‌های عصبی در تقریب اختلاف مابین ورودی کنترلی و خروجی غیرخطی‌ساز می‌باشد. (ب) در راستای دومین کار تحقیقاتی آتی می‌توان ساختار کنترلی ترکیبی پیشنهادی را با تعریف بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی دیگری تعمیم و توسعه داد و زمان‌های همگرایی مطلق مناسب‌تری را (که وابستگی کمتری به شرایط اولیه دارند) برای وسیله‌ی دریایی فراهم آورد. (پ) در راهکار کنترلی پیشنهادی فرض گردید که هر دو بردار $\eta(t)$ و $\dot{\eta}(t)$ قابل اندازه‌گیری و در دسترس هستند، اما در پیاده‌سازی عملی، حسگرهای مرتبط با اندازه‌گیری متغیرهای سرعت، گران و پرهزینه می‌باشند. به عنوان سومین کار پژوهشی آینده، می‌توان رویکرد غیرخطی زمان-متناهی را برای تخمین متغیرهای سرعت وسیله‌ی دریایی طراحی کرد. فلذا با اتصال رویکرد فوق‌الذکر و کنترل‌کننده‌ی مقاله‌ی حاضر، می‌توان الگوریتم کنترلی غیرخطی زمان-متناهی جامعی را ارائه داد که تطابق بیشتری با واقعیت‌های پیاده‌سازی عملی داشته باشد. (ت) در این مقاله فرض شد که وسیله‌ی دریایی خودکار از نوع تحریک کامل باشد. بنابراین به عنوان چهارمین کار پژوهشی آتی می‌توان راهکار کنترلی ترکیبی پیشنهادی را به وسیله‌ی دریایی خودکار تحریک ناقص (که تعداد ورودی‌های کنترلی آن کمتر از درجه‌های آزادی‌اش است) تعمیم داد. (ث) در مقاله‌ی حاضر، از مدل وسیله‌ی دریایی سه درجه آزادی تحریک کامل برای طراحی ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تطبیقی استفاده شد. به عنوان موضوع تحقیقاتی بعدی، می‌توان ساختار کنترلی غیرخطی پیشنهادی را به مدل زیردریایی خودکار شش درجه آزادی تحریک کامل (یا حتی تحریک ناقص) تعمیم داد.

مراجع

- [1] A. Abooe, M. Hayeri Mehrizi, M. M. Arefi, and S. Yin, "Finite-time sliding mode control for a 3-DOF fully actuated autonomous surface vehicle," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 2, pp. 371-389, 2021.
- [2] R. Chu, Z. Liu, and Z. Chu, "Improved super-twisting sliding mode control for ship heading with sideslip angle compensation," *Ocean Engineering*, vol. 260, no. 1, pp. 111996 (1-10), 2022.
- [3] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooe, and O. Kaynak, "Adaptive robust finite-time nonlinear control of a typical autonomous underwater vehicle with saturated inputs and uncertainties," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 26, no. 5, pp. 2517-2527, 2021.
- [4] T. Jiang, Y. Yan, D. Wu, S. Yu, and T. Li, "Neural network based adaptive sliding mode tracking control of autonomous surface vehicles with input quantization and saturation," *Ocean Engineering*, vol. 265, no. 1, pp. 112505 (1-9), 2022.
- [5] Y. Yan, S. Yu, and C. Sun, "Event-triggered sliding mode tracking control of autonomous surface vehicles," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 358, no. 8, pp. 4393-4409, 2021.
- [6] M. Li, C. Guo, H. Yu, and Y. Yuan, "Line-of-sight-based global finite-time stable path following control of unmanned surface vehicles with actuator saturation," *ISA Transactions*, vol. 125, no. 1, pp. 306-317, 2022.
- [7] I. Collado-Gonzalez, A. Gonzalez-Garcia, C. Sotelo, D. Sotelo, and H. Castañeda, "A real-time NMPC guidance law and robust control for an autonomous surface vehicle," *IFAC-Papers Online*, vol. 54, no. 16, pp. 252-257, 2021.
- [8] Y. Weng and N. Wang, "SMC-based model-free tracking control of unknown autonomous surface vehicles," *ISA Transactions*, DOI: 10.1016/j.isatra.2022.08.012, 2022.
- [9] J. Rodriguez, H. Castañeda, A. Gonzalez-Garcia, and J. L. Gordillo, "Finite-time control for an unmanned surface vehicle based on adaptive sliding mode strategy," *Ocean Engineering*, vol. 254, no. 1, pp. 111255 (1-9), 2022.
- [10] Q. Yao, "Adaptive finite-time sliding mode control design for finite-time fault-tolerant trajectory tracking of marine vehicles with input saturation," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 18, pp. 13593-13619, 2020.
- [11] L. M. Kinjo, S. Wirtensohn, J. Reuter, T. Menard, and O. Gehan, "Trajectory tracking of a fully-actuated surface vessel using nonlinear model predictive control," *IFAC-Papers Online*, vol. 54, no. 16, pp. 51-56, 2021.
- [12] S. Souissi and M. Boukattaya, "Time-varying nonsingular terminal sliding mode control of autonomous surface vehicle with predefined convergence time," *Ocean Engineering*, vol. 263, no. 1, pp. 112264 (1-9), 2022.
- [13] Y. Wang, B. Jiang, Z. G. Wu, S. Xie, and Y. Peng, "Adaptive sliding mode fault-tolerant fuzzy tracking control with application to unmanned marine vehicle," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 51, no. 11, pp. 1304-1312, 2021.
- [14] Y. Zhao, X. Sun, G. Wang, and Y. Fan, "Adaptive backstepping sliding mode tracking control for underactuated unmanned surface vehicle with disturbances and input saturation," *IEEE Access*, vol. 9, no. 1, pp. 1304-1312, 2020.
- [15] Y. Yu, C. Guo, and H. Yu, "Finite-time PLOS-based integral sliding-mode adaptive neural path following for unmanned surface vessels with unknown dynamics and disturbances," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 16, no. 4, pp. 1500-1511, 2019.
- [16] M. Van, V. T. Do, M. O. Khyam, and X. P. Do, "Tracking control of uncertain surface vessels with global finite-time convergence," *Ocean Engineering*, vol. 241, no. 1, pp. 109974 (1-9), 2021.
- [17] B. Qiu, G. Wang, Y. Fan, D. Mu, and X. Sun, "Path following of underactuated unmanned surface vehicle based on trajectory linearization control with input saturation and external disturbances," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 18, no. 1, pp. 2108-2119, 2020.
- [18] Y. Yan, X. Zhao, S. Yu, and C. Wang, "Barrier function-based adaptive neural network sliding mode control of autonomous surface vehicles," *Ocean Engineering*, vol. 238, no. 8, pp. 109684 (1-9), 2021.
- [19] D. Mu, G. Wang, and Y. Fan, "Trajectory tracking control for underactuated unmanned surface vehicle subject to uncertain dynamics and input saturation," *Neural Computing and Applications*, vol. 33, no. 1, pp. 12777-12789, 2021.
- [20] W. He, Z. Yin, and C. Sun, "Adaptive neural network control of a marine vessel with constraints using

- the asymmetric barrier Lyapunov function,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, no. 7, pp. 1641-1651, 2017.
- [21] M. Y. Li, J. Xu, W. B. Xie, and H. B. Wang, “Finite-time composite learning control for trajectory tracking of dynamic positioning vessels,” *Ocean Engineering*, vol. 262, no. 1, pp. 112288 (1-10), 2022.
- [22] X. Sun, G. Wang, and Y. Fan, “Adaptive trajectory tracking control of vector propulsion unmanned surface vehicle with disturbances and input saturation,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 106, no. 1, pp. 2277-2291, 2021.
- [23] Y. Zhang, W. Tan, X. Meng, Q. Zhang, and Y. Hu, “Adaptive on-line approximator-based finite-time trajectory tracking control for the surface vessel,” *IEEE Access*, vol. 10, no. 1, pp. 104294-104285, 2022.
- [24] N. Wang and C. K. Ahn, “Hyperbolic-tangent LOS guidance-based finite-time path following of underactuated marine vehicles,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 10, pp. 8566-8575, 2020.
- [25] G. Zhu and J. Du, “Global robust adaptive trajectory tracking control for surface ships under input saturation,” *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 45, no. 2, pp. 442-450, 2020.
- [26] H. Fakhrazade Bafghi, M.R. Jahed-Motlagh, A. Abooe, and A. Moarefianpur, “Robust finite-time tracking for a square fully-actuated class of nonlinear systems,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 103, no. 21, pp. 1-15, 2021.
- [27] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooe, and S. Yin, “Distributed adaptive-neural finite-time consensus control for stochastic nonlinear multi-agent systems subject to saturated inputs,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, DOI: 10.1109/TNNLS.2022.3145975, 2022.
- [28] M. Basin, “Finite- and fixed-time convergent algorithms: Design and convergence time estimation,” *Annual Reviews in Control*, vol. 48, no. 1, pp. 209–221, 2019.
- [29] X. Yu, Y. Feng, and Z. Man, “Terminal sliding mode control: An overview,” *IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society*, vol. 2, no. 1, pp. 36-52, 2021.
- [30] A. Abooe and M. M. Arefi, “Robust finite-time stabilizers for a connected chain of nonlinear double-integrator systems,” *IEEE Systems Journal*, vol. 13, no. 1, pp. 833-841, 2019.
- [۳۱] علی ابویی، مهران اسلامی و محمد حائری، “طراحی کنترل‌کننده‌های غیرخطی زمان-محدود مقاوم برای زیردریایی شش درجه آزادی به منظور ردیابی مسیر” *مجله علمی و پژوهشی کنترل*، جلد ۱۴، شماره ۱، صفحات ۹۳-۱۱۳، بهار ۱۳۹۹.
- [۳۲] جواد مولائی، اکبر شرقی و رضا آقایی طوق، “طراحی کنترل مد لغزشی ترمینال زمان-ثابت برای ربات با چرخ‌های مکانوم” *نشریه سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق*، جلد ۸، شماره ۲، صفحات ۱۹-۳۷، پاییز و زمستان ۱۴۰۰.
- [۳۳] مینا قهستانی، احمدرضا ولی و مهدی سیاهی، “طراحی کنترل‌کننده غیرخطی به منظور پایدارسازی زمان محدود سیستم تعلیق الکترومغناطیسی” *نشریه سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق*، جلد ۸، شماره ۲، صفحات ۳۸-۶۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۰.
- [۳۴] هادی دلاوری و سیده زهرا رشیدی‌نژاد حیدری، “طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال تطبیقی مرتبه کسری برای ردیابی نقطه حداکثر توان در یک سلول خورشیدی تحت شرایط عادی و شرایط سایه جزئی” *نشریه سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق*، جلد ۵، شماره ۲، صفحات ۴-۲۲، ۱۳۹۷.

پیوست آ.

معادلات دینامیکی مدل کشتی Cybership II در مرجع [۱] به طور کامل آورده شده و مطالعه‌ی دقیق این مرجع نشان می‌دهد که مدل این کشتی از معادلات دینامیکی غیرخطی (۱۲) پیروی می‌کند. بنابراین ویژگی ۴ برای کشتی Cybership II برقرار است. بردار یافته‌ی (پ-۱) قابل بیان می‌باشد.

$$\mathbf{K}(t) = [k_1(t), k_2(t), k_3(t)]^T \triangleq \dot{\boldsymbol{\eta}}_d(t) - \mathbf{E}_1(t) - \mathbf{E}_2(t) \quad \text{or}$$

$$\begin{cases} k_1(t) \\ k_2(t) \\ k_3(t) \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_d(t) - l_{1_1} \int_0^t \text{sign}(e_1(v)) dv - l_{2_1} \int_0^t \text{sign}(e_2(v)) dv \\ \dot{y}_d(t) - l_{1_2} \int_0^t \text{sign}(e_3(v)) dv - l_{2_2} \int_0^t \text{sign}(e_4(v)) dv \\ \dot{\psi}_d(t) - l_{1_3} \int_0^t \text{sign}(e_5(v)) dv - l_{2_3} \int_0^t \text{sign}(e_6(v)) dv \end{cases} \quad (\text{پ-۱})$$

بدیهی است با مشتق‌گیری زمانی از $\mathbf{K}(t)$ ، فرم گسترش یافته‌ی بردار $\dot{\mathbf{K}}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ به صورت (پ-۲) نتیجه می‌گردد.

$$\dot{K}(t) = [\dot{k}_1(t), \dot{k}_2(t), \dot{k}_3(t)]^T \triangleq \dot{\eta}_d - \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \text{ or}$$

$$\begin{cases} \dot{k}_1(t) \\ \dot{k}_2(t) \\ \dot{k}_3(t) \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_d(t) - l_{11} \text{sign}(e_1(t)) - l_{21} \text{sign}(e_2(t)) \\ \dot{y}_d(t) - l_{12} \text{sign}(e_3(t)) - l_{22} \text{sign}(e_4(t)) \\ \dot{z}_d(t) - l_{13} \text{sign}(e_5(t)) - l_{23} \text{sign}(e_6(t)) \end{cases} \quad (2-پ)$$

چنانچه در ویژگی ۴ که برای کشتی Cybership II برقرار است، دو بردار دلخواه $\Lambda(t)$ و $\dot{\Lambda}(t)$ با دو بردار $K(t)$ و $\dot{K}(t)$ جایگزین گردند، عبارت رگرسوری خطی در پارامتر (پ-۳) برای کشتی Cybership II حاصل می‌شود. در (پ-۳)، $Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})$ و θ به ترتیب ماتریس رگرسور اصلی و بردار ثابت‌های فیزیکی نامعلوم کشتی Cybership II هستند.

$$M(\eta)\dot{K}(t) + C(\eta, \dot{\eta})K(t) + D(\eta, \dot{\eta})K(t) = Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})\theta \quad (3-پ)$$

$M(\eta)$ ، $C(\eta, \dot{\eta})$ و $D(\eta, \dot{\eta})$ قبلاً در رابطه‌ی (۱۳) به صورت $\{M(\eta) = R \bar{M} R^T\}$ ، $\{C(\eta, \dot{\eta}) = R(\bar{C}(v) - \bar{M} P) R^T\}$ و $\{D(\eta, \dot{\eta}) = R\bar{D}(v) R^T\}$ معرفی شده‌اند. چنانچه این سه تساوی اخیر به (پ-۳) اعمال شوند، فرم رگرسوری خطی در پارامتر (پ-۴) نتیجه می‌گردد. لازم به ذکر است که سه ماتریس \bar{M} ، $\bar{C}(v)$ و $\bar{D}(v)$ قبلاً در (۱۰) معرفی شده‌اند.

$$\begin{cases} (R \bar{M} R^T)\dot{K}(t) + (R(\bar{C}(v) - \bar{M} P) R^T)K(t) + (R\bar{D}(v) R^T)K(t) = Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})\theta \\ \text{where } R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } P = \begin{bmatrix} 0 & -\psi & 0 \\ -\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } v = \begin{bmatrix} v_1 \triangleq u \\ v_2 \triangleq v \\ v_3 \triangleq r \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4-پ)$$

چنانچه طرفین فرم رگرسوری خطی در پارامتر (پ-۴) را در ترانهاده‌ی ماتریس تبدیل یعنی R^T ضرب کرده و از ویژگی $\{R^T R = I_{3 \times 3}\}$ استفاده شود، آنگاه فرم رگرسوری (پ-۵) منتج می‌گردد.

$$(\bar{M} R^T)\dot{K}(t) + ((\bar{C}(v) - \bar{M} P) R^T)K(t) + (\bar{D}(v) R^T)K(t) = R^T Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})\theta \quad (5-پ)$$

اگر عبارت سمت راست فرم رگرسوری (پ-۵) به صورت $\{Y \triangleq R^T Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})\}$ تعریف گردد، آنگاه با استناد به ویژگی $\{R^T R = I_{3 \times 3}\}$ ، ماتریس رگرسوری $Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})$ با استفاده از $\{Y = RY\}$ تعیین خواهد شد. با در نظر گرفتن تعریف اخیر و جایگذاری ماتریس‌های \bar{M} ، $\bar{C}(v)$ و $\bar{D}(v)$ از (۱۰) در فرم رگرسوری (پ-۵)، می‌توان ماتریس رگرسوری \bar{Y} را با انجام عملیات زمان‌بر ریاضی به دست آورد. با به دست آمدن ماتریس رگرسوری \bar{Y} و استفاده از $\{Y = R\bar{Y}\}$ ، ماتریس رگرسوری اصلی $Y(\eta, \dot{\eta}, K, \dot{K})$ نتیجه می‌شود. با انجام عملیات ریاضی زمان‌بر فوق‌الذکر، بردار ثابت‌های فیزیکی نامعلوم کشتی Cybership II (یعنی $\theta \in \mathbb{R}^{20 \times 1}$) به صورت (پ-۶) حاصل می‌شود که برداری ستونی با بیست سطر است.

$$\theta_{20 \times 1} = [m_{11}, m_{23}, x_u, x_{|u|u}, x_{uuu}, m_{22}, Y_v, Y_{|v|v}, Y_{r|v}, Y_r, Y_{|v|r}, Y_{|r|r}, m_{32}, m_{33}, N_v, N_{|v|v}, N_{|r|v}, N_r, N_{|v|r}, N_{|r|r}]^T \quad (6-پ)$$

با ادامه‌ی عملیات ریاضی، ماتریس رگرسوری $\bar{Y} \in \mathbb{R}^{3 \times 20}$ برای کشتی Cybership II به صورت (پ-۷) استخراج گردیده که ماتریسی با سه سطر و بیست ستون می‌باشد. باید توجه داشت که ماتریس رگرسوری \bar{Y} کاملاً معلوم و مشخص بوده و فاقد ثابت‌های فیزیکی نامعلوم کشتی است.

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{1,1} & \bar{Y}_{1,2} & \bar{Y}_{1,3} & \dots & \bar{Y}_{1,19} & \bar{Y}_{1,20} \\ \bar{Y}_{2,1} & \bar{Y}_{2,2} & \bar{Y}_{2,3} & \dots & \bar{Y}_{2,19} & \bar{Y}_{2,20} \\ \bar{Y}_{3,1} & \bar{Y}_{3,2} & \bar{Y}_{3,3} & \dots & \bar{Y}_{3,19} & \bar{Y}_{3,20} \end{bmatrix} \quad (7-پ)$$

درایه‌های ماتریس رگرسوری $\bar{Y} \in \mathbb{R}^{3 \times 20}$ به ترتیب در روابط (پ-۸)، (پ-۹) و (پ-۱۰) گزارش شده‌اند. لازم به ذکر است که $k_1(t)$ ، $k_2(t)$ ، $k_3(t)$ ، $\dot{k}_1(t)$ ، $\dot{k}_2(t)$ ، $\dot{k}_3(t)$ ، ψ و $\dot{\psi}$ همگی قبلاً معرفی گردیده‌اند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}_{1,1} = f_1 + h_1 - v_2 k_3 \\ \bar{Y}_{1,2} = -v_3 k_3 \\ \bar{Y}_{1,3} = -g_1 \\ \bar{Y}_{1,4} = -|v_1| g_1 \\ \bar{Y}_{1,5} = -v_1^2 g_1 \\ \bar{Y}_{1,6} = \bar{Y}_{1,7} = \dots = \bar{Y}_{1,19} = \bar{Y}_{1,20} = 0 \end{array} \right. \quad \text{where} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(k_1, \dot{k}_2, \psi) \triangleq k_1 \cos \psi + \dot{k}_2 \sin \psi \\ g_1(k_1, k_2, \psi) \triangleq k_1 \cos \psi + k_2 \sin \psi \\ h_1(k_1, k_2, \psi, \dot{\psi}) \triangleq -k_1 \dot{\psi} \sin \psi + k_2 \dot{\psi} \cos \psi \end{array} \right. \quad (8\text{-پ})$$

و

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}_{2,1} = v_1 k_3, \bar{Y}_{2,9} = -|v_3| g_2 \\ \bar{Y}_{2,2} = \dot{k}_3, \bar{Y}_{2,10} = -k_3 \\ \bar{Y}_{2,3} = \bar{Y}_{2,4} = \bar{Y}_{2,5} = 0 \\ \bar{Y}_{2,6} = f_2 + h_2, \bar{Y}_{2,11} = -|v_2| k_3 \\ \bar{Y}_{2,7} = -g_2, \bar{Y}_{2,12} = -|v_3| k_3 \\ \bar{Y}_{2,8} = -|v_2| g_2 \\ \bar{Y}_{2,13} = \bar{Y}_{2,14} = \dots = \bar{Y}_{2,20} = 0 \end{array} \right. \quad \text{where} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2(\dot{k}_1, \dot{k}_2, \psi) \triangleq -\dot{k}_1 \sin \psi + \dot{k}_2 \cos \psi \\ g_2(k_1, k_2, \psi) \triangleq -k_1 \sin \psi + k_2 \cos \psi \\ h_2(k_1, k_2, \psi, \dot{\psi}) \triangleq k_1 \dot{\psi} \cos \psi + k_2 \dot{\psi} \sin \psi \end{array} \right. \quad (9\text{-پ})$$

و

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}_{3,1} = v_2 g_1 - v_1 g_2 \\ \bar{Y}_{3,2} = v_3 g_1 \\ \bar{Y}_{3,3} = \bar{Y}_{3,4} = \dots = \bar{Y}_{3,12} = 0 \\ \bar{Y}_{3,13} = f_2 + h_2 \\ \bar{Y}_{3,14} = \dot{k}_3 \\ \bar{Y}_{3,15} = -g_2 \\ \bar{Y}_{3,16} = -|v_2| g_2 \\ \bar{Y}_{3,17} = -|v_3| g_2 \\ \bar{Y}_{3,18} = -k_3 \\ \bar{Y}_{3,19} = -|v_2| k_3 \\ \bar{Y}_{3,20} = -|v_3| k_3 \end{array} \right. \quad \text{where} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1(k_1, k_2, \psi) \triangleq k_1 \cos \psi + k_2 \sin \psi \\ f_2(\dot{k}_1, \dot{k}_2, \psi) \triangleq -\dot{k}_1 \sin \psi + \dot{k}_2 \cos \psi \\ g_2(k_1, k_2, \psi) \triangleq -k_1 \sin \psi + k_2 \cos \psi \\ h_2(k_1, k_2, \psi, \dot{\psi}) \triangleq k_1 \dot{\psi} \cos \psi + k_2 \dot{\psi} \sin \psi \end{array} \right. \quad (10\text{-پ})$$