



دانشگاه صنعتی سهند

نشریه سالانه‌های غیرخطی در

مهندسی برق

جلد ۳- شماره ۱- تابستان ۱۳۹۴

صفحه ۵۰ الی ۶۹

ISSN: 2322-3146

<http://jnsee.sut.ac.ir>

طراحی و آنالیز پایداری سیستم‌های کنترل مبتنی بر مدل فازی T-S نوع ۲ فاصله‌ای در حضور رویت گره‌های فازی نوع ۲ فاصله‌ای با رویکرد تابع لیاپانوف فازی و جبران‌سازی توزیع شده غیر موازی

آرمان خانی^۱، سحرانه قائمی^۲ و محمد علی بادامچی زاده^۳

^۱فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، دانشگاه تبریز، a.khani90@ms.tabrizu.ac.ir

^۲نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، ghaemi@tabrizu.ac.ir

^۳دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، mbadamchi@tabrizu.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۱/۴

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۹

چکیده

چکیده: در این مقاله روش طراحی کنترل‌کننده‌های فازی نوع-۲ همراه با رویت گر فازی نوع-۲ مدل T-S برای یک سیستم غیرخطی همراه با پارامترهای نامعین ارائه شده است. مدل فازی T-S بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع-۲ فاصله‌ای برای مدل‌سازی دینامیک سیستم غیرخطی و دینامیک رویت گر اعمال می‌شود. پارامترهای نامعین توسط توابع عضویت مجموعه‌های فازی نوع-۲ فاصله‌ای با تعریف توابع عضویت بالا و پایین مشخص می‌شود. برای کنترل‌کننده فازی نوع-۲ فاصله‌ای توابع عضویت و تعداد قانون‌های فازی کنترل‌کننده به صورت دلخواه طوری انتخاب می‌شوند که با مدل فازی T-S سیستم و رویت گر متفاوت باشد که به روش جبران‌سازی توزیع شده غیرموازی (non-PDC) معروف است. برای آنالیز پایداری یک تابع لیاپانوف فازی در نظر گرفته می‌شود به طوری که شرایط پایداری به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMIs) بدست آید.

واژه‌های کلیدی

مدل T-S فازی نوع-۲

فاصله‌ای،

آنالیز پایداری،

تابع لیاپانوف فازی،

نامساوی‌های ماتریسی خطی

(LMIs)



Sahand University
of Technology

Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering

Vol.3, No.1,
Summer 2015

ISSN: 2322 – 3146

<http://jnsee.sut.ac.ir>

Stability Analysis and Controller Design for Interval Type-2 T-S Fuzzy Systems Based on Interval Type-2 T-S Fuzzy Observer Under non-Parallel Distributed Compensation and Fuzzy Lyapunov Function Approach

Arman Khani¹, Sehraneh Ghaemi², and Mohammad Ali Badamchizadeh³

¹Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, a.khani90@ms.tabrizu.ac.ir

²**Corresponding Author**, Assistant Prof., Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, ghaemi@tabrizu.ac.ir

³Associate Prof., Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, mbadamchi@tabrizu.ac.ir

ABSTRACT

Keywords

Interval type-2 T-S
fuzzy model,
Stability analysis,
Fuzzy Lyapunov
function,
Linear matrix
inequalities (LMIs)

In this paper, we investigate the design method for interval type-2 (IT2) T-S fuzzy controller based on IT2 T-S fuzzy observer for nonlinear systems along with uncertainty parameters. In order to analyze the stability and synthesis the control methods conveniently, an IT2 (T-S) fuzzy model is applied through representing the dynamic of nonlinear systems and dynamic of observer. Uncertainty parameters are captured by IT2 membership function characterized by the lower and upper membership functions. In this paper, for IT2 fuzzy controller, the membership functions and number of rules can be freely chosen different from the IT2 T-S fuzzy model and IT2 T-S fuzzy observer. This method is known non- Parallel Distributed Compensation. To reduce the conservativeness of stability analysis, a fuzzy Lyapunov function candidate is applied. The stability conditions in term of linear matrix inequalities (LMIs) are obtained.

۱ - مقدمه

در سال‌های اخیر کنترل‌کننده‌های فازی مدل $T-S^1$ بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع ۱ - همراه با رویت گره‌های فازی مدل $T-S$ توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده‌اند. تئوری پایداری لیاپانوف و جبران‌سازی توزیع شده موازی (PDC^2) رایج‌ترین روش برای طراحی و آنالیز پایداری سیستم‌های کنترل مدل $T-S$ همراه با رویت گره فازی مدل $T-S$ بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع ۱ - می‌باشند، به طوری که برای هر زیرسیستم خطی یک کنترل‌کننده و یک رویت گره بصورت جداگانه طراحی می‌شود که در آن شرط پایداری بصورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI^3) بدست می‌آیند [۱-۷]. در طراحی کنترل‌کننده‌های فازی مدل $T-S$ در حضور رویت گره‌های فازی مدل $T-S$ دو حالت وجود دارد که در آن وزن‌های مدل فازی سیستم و مدل فازی رویت گره تابع حالت‌های سیستم یا تابع تخمین حالت‌های می‌باشند [۸ و ۹]. در هر دو حالت ذکر شده مدل $T-S$ سیستم، مدل $T-S$ رویت گره و مدل $T-S$ کنترل‌کننده تعداد قانون‌های فازی برابری دارند. در روش‌های ارائه شده برای تمامی زیرسیستم‌های خطی مدل شده بصورت $T-S$ و مدل $T-S$ رویت گره یک تابع لیاپانوف عمومی برای آنالیز پایداری در نظر گرفته شده است. پیدا کردن تابع لیاپانوف عمومی برای تمام زیرسیستم‌های خطی ممکن است محدودیتی بر روی آنالیز پایداری بوجود آورد. به منظور کاهش محدودیت بر روی آنالیز پایداری اخیراً توابع لیاپانوف متعددی مانند تابع لیاپانوف فازی در نظر گرفته شده است که باعث افزایش انعطاف پذیری به طراحی شده است [۹].

به منظور در نظر گرفتن تابع لیاپانوف که به شکل توابع عضویت بستگی داشته باشد، تابع لیاپانوف فازی بر اساس مجموعه‌های فازی نوع ۲ - [۱۰ - ۱۴] در نظر گرفته شده است. اخیراً مجموعه‌های فازی نوع ۲ - به منظور مدل کردن نامعینی در مقالات ارائه شده است [۱۵]. نامعینی در پارامترهای سیستم به خوبی در توابع عضویت مجموعه‌های فازی نوع ۲ - قابل مشاهده می‌باشد [۱۵]. کاربردهای مختلفی از جمله در کنترل سیستم‌های غیرخطی نامعین بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع ۲ - در مقالات مشاهده می‌شوند [۱۶]. در مقاله حاضر منظور از مجموعه‌های فازی نوع ۲، مجموعه‌های فازی نوع ۲ - فاصله‌ای می‌باشند که در آن عضویت ثانویه برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود. اخیراً بعضی تحقیقات بر روی کنترل سیستم‌های غیرخطی بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع ۲ - و مدل کردن سیستم‌های غیرخطی نامعین با استفاده از مدل $T-S$ انجام شده است [۱۴، ۱۶-۱۸]. در [۱۶] روش مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی نامعین با استفاده از مجموعه‌های فازی نوع ۲ - به طور مفصل ارائه شده است. در مقاله حاضر ایده اصلی، طراحی کنترل‌کننده همراه با رویت گره فازی بر اساس مدل $T-S$ و مجموعه‌های فازی نوع ۲ - فاصله‌ای بر اساس رویکرد جبران سازی توزیع شده غیر موازی ($non-PDC$) و در نظر گرفتن تابع لیاپانوف فازی برای آنالیز پایداری می‌باشد که در آن لزوماً تعداد قانون‌های فازی مدل $T-S$ سیستم و مدل $T-S$ رویت گره با تعداد قانون‌های فازی مدل $T-S$ کنترل‌کننده برابر نمی‌باشند به طوری که می‌توان با در نظر گرفتن تعداد قانون‌های فازی کمتر برای کنترل‌کننده نسبت به مدل فازی سیستم و رویت گره و همچنین در نظر گرفتن توابع عضویت مناسب به کنترل‌کننده‌ای با ساختار ساده دست یافت. ویژگی بارز طراحی کنترل‌کننده و رویت گره با این روش سادگی ساختار کنترل‌کننده نسبت به رویکرد PDC و مقاوم بودن کنترل‌کننده و رویت گره در برابر نامعینی

¹Takagi - sugeno²Parallel Distributed Compensation³Linear Matrix Inequality

در پارامترهای سیستم می‌باشد. همچنین در این مقاله توابع عضویت مدل فازی T-S سیستم غیرخطی و مدل T-S رویت‌گر لزوماً از قسمت‌های غیرخطی سیستم بدست نمی‌آیند، به طوری که طراح می‌تواند با در نظر گرفتن توابع عضویت مناسب به وزن‌های فازی ساده‌ای دست یابد که محاسبه مشتق زمانی وزن‌های فازی که در آنالیز پایداری از آن استفاده می‌شود را آسان کند و همچنین توابع عضویت در نظر گرفته شده تابع حالت‌هایی از سیستم باشند که قابل اندازه‌گیری می‌باشند به طوری که این امر در قسمت شبیه‌سازی به خوبی مشاهده می‌شود.

شرایط پایداری سیستم کنترل مبتنی بر مدل فازی T-S سیستم، مدل فازی T-S رویت‌گر و کنترل‌کننده بصورت نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI) ارائه می‌شود. در ادامه ابتدا در بخش ۲ مدل فازی T-S سیستم بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع-۲ فاصله‌ای ارائه می‌شود. در بخش ۳ مدل فازی T-S رویت‌گر بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع-۲ فاصله‌ای ارائه می‌شود. در بخش ۴ مدل T-S S کنترل‌کننده بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع-۲ فاصله‌ای بیان شده است. در بخش ۵ سیستم کنترل مبتنی بر مدل T-S سیستم، مدل T-S رویت‌گر و مدل T-S کنترل‌کننده ارائه می‌شود. در بخش ۶ آنالیز پایداری ارائه شده است. در بخش ۷ شبیه‌سازی و نهایتاً در بخش آخر نتیجه‌گیری نهایی بیان شده است.

۲- مدل فازی T-S سیستم بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع-۲ فاصله‌ای [۱۶]

یک سیستم فازی مدل T-S بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع-۲ با p قانون فازی و ψ ورودی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Rule } i : & \text{ IF } f_1(x(t)) \text{ is } \tilde{M}_1^i \text{ and } \dots, f_\psi(x(t)) \text{ is } \tilde{M}_\psi^i \\ \text{THEN } & \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن \tilde{M}_α^i یک مجموعه فازی نوع-۲ فاصله‌ای مربوط به قانون فازی α همراه با متغیر فازی $f_\alpha(x(t))$ می‌باشد به طوری که:
 همچنین $\alpha = 1, 2, \dots, \psi, i = 1, 2, \dots, p$. $B_i \in \mathcal{R}^{n \times m}, A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$ به ترتیب ماتریس حالت و ماتریس ورودی سیستم می‌باشند. $x(t) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ بردار حالت‌های سیستم و $u(t) \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ سیگنال کنترلی می‌باشند. در مدل فازی T-S نوع-۲ برای هر قانون دو وزن بالا و پایین تعریف می‌شود که برای قانون i ام بصورت زیر می‌باشد:

$$[w_i^L(x(t)), w_i^U(x(t))] , i = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} w_i^L(x(t)) &= \underline{\mu}_{M_1^i}(f_1(x(t))) \times \underline{\mu}_{M_2^i}(f_2(x(t))) \times \dots \times \underline{\mu}_{M_\psi^i}(f_\psi(x(t))) \geq 0 \\ w_i^U(x(t)) &= \bar{\mu}_{M_1^i}(f_1(x(t))) \times \bar{\mu}_{M_2^i}(f_2(x(t))) \times \dots \times \bar{\mu}_{M_\psi^i}(f_\psi(x(t))) \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{M_\alpha^i}(f_\alpha(x(t))) &\in [0, 1] \\ \bar{\mu}_{M_\alpha^i}(f_\alpha(x(t))) &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (۴)$$

که برتیب درجه عضویت پایین و بالای توابع عضویت مربوطه می‌باشند. لذا رابطه زیر نیز صادق می‌باشد:

$$\bar{\mu}_{M_\alpha^i}(f_\alpha(x(t))) \geq \underline{\mu}_{M_\alpha^i}(f_\alpha(x(t))) \geq 0 \quad (۵)$$

که منجر به نامساوی زیر می‌شود:

$$w_i^U(x(t)) \geq w_i^L(x(t)) \quad (۶)$$

در نهایت مدل فازی T-S سیستم بصورت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^p w_i^L(x(t)) \underline{v}_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) + \sum_{i=1}^p w_i^U(x(t)) \bar{v}_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ &= \sum_{i=1}^p \tilde{w}_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن:

$$\tilde{w}_i(x(t)) = w_i^L(x(t)) \underline{v}_i(x(t)) + w_i^U(x(t)) \bar{v}_i(x(t)) \in [0, 1] \quad (۸)$$

به طوری که:

$$\sum_{i=1}^p \tilde{w}_i(x(t)) = 1, \underline{v}_i(x(t)) \in [0, 1], \bar{v}_i(x(t)) \in [0, 1]$$

که در آن $\underline{v}_i(x(t)), \bar{v}_i(x(t))$ توابع غیرخطی هستند که معمولاً برابر ۰.۵ در نظر گرفته می‌شوند.

۳- مدل فازی T-S رویت گر بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع ۲-فاصله‌ای

یک رویت گر فازی نوع ۲-فاصله‌ای را با p قانون فازی در نظر بگیرید که شروط مقدم مجموعه‌های فازی نوع ۲ [۱۸] و شروط نتیجه سیستم دینامیکی خطی رویت گر می‌باشد. قانون‌های فازی مربوط به رویت گر بصورت رابطه (۹) می‌باشند که در آن وزن‌های فازی مربوط به مدل T-S سیستم (۷) و رویت گر یکسان می‌باشند:

$$\begin{aligned} \text{Rule } i : & \text{ If } f_1(x(t)) \text{ is } \tilde{M}_1^i \text{ and } \dots, f_\psi(x(t)) \text{ is } \tilde{M}_\psi^i \\ \text{Then } \hat{x}(t) &= A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)), i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن \tilde{M}_α^i یک مجموعه فازی نوع ۲-فاصله‌ای مربوط به قانون فازی i ام همراه با متغیر فازی $f_\alpha(x(t))$ می‌باشد به طوری که: $\alpha = 1, 2, \dots, \psi, i = 1, 2, \dots, p$ و ψ یک مقدار مثبت است [۱۸]. در اینجا فرض بر این است که متغیرهای فازی و توابع عضویت، تابع حالت‌هایی از سیستم هستند که قابل اندازه گیری باشند و در قسمت تجزیه کردن سیستم غیرخطی به زیر سیستم‌های

خطی اگر در متغیرهای فازی حالت‌هایی از سیستم که قابل اندازه‌گیری نباشند وجود داشته باشد فقط از محدوده تغییرات آن حالت‌ها به منظور مدل‌سازی استفاده می‌شود و برای در نظر گرفتن توابع عضویت فقط از حالت‌هایی که قابل اندازه‌گیری باشند استفاده می‌شود. همچنین $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به ترتیب ماتریس حالت و ماتریس ورودی سیستم می‌باشند. $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ بردار حالت‌های سیستم و $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ سیگنال کنترلی می‌باشد. پارامتر L_i بهره‌های رویت‌گر می‌باشد که باید تعیین شود. در رابطه (۹) تخمین حالت $\hat{x}(t)$ می‌باشد. همچنین $y(t)$ و $\hat{y}(t)$ به ترتیب خروجی سیستم و خروجی رویت‌گر می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^p \tilde{w}_i(x(t)) C_i x(t) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^p \tilde{w}_i(x(t)) C_i \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن $\tilde{w}_i(x(t))$ بصورت رابطه (۲) می‌باشد. همچنین ماتریس‌های C_i ماتریس‌های خروجی مدل T-S سیستم و مدل T-S رویت‌گر می‌باشند که در این مقاله فرض می‌شود تمام ماتریس‌های خروجی مدل T-S سیستم و مدل T-S رویت‌گر برابر می‌باشند. یعنی:

$$C_1 = C_2 = \dots = C_p = C \quad (11)$$

در نتیجه مدل فازی T-S رویت‌گر بصورت رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^p \tilde{w}_i(x(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (12)$$

۴- مدل فازی T-S کنترل‌کننده بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع ۲-فاصله‌ای

در ادامه کنترل‌کننده فازی نوع ۲-فاصله‌ای به منظور پایداری مدل فازی T-S (۷) در حضور رویت‌گر (۱۲) ارائه می‌شود. قانون‌های فازی مربوط به کنترل‌کننده بصورت رابطه زیر می‌باشد که فقط قسمت شرط مقدم قانون فازی از [۱۸] می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Rule } j: & \text{ IF } g_1(x(t)) \text{ is } \tilde{N}_1^j \text{ AND } \dots \text{ AND } g_\psi(x(t)) \text{ is } \tilde{N}_\psi^j \\ \text{THEN } & u(t) = G_j \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

به طوری که $G_j \in \mathbb{R}^{m \times n}, j = 1, 2, \dots, c$ بهره‌های فیدبک حالت می‌باشند که باید تعیین شوند و \tilde{N}_α^j مجموعه فازی نوع ۲-فاصله‌ای مربوط به j امین قانون فازی و متغیر فازی $g_\alpha(x(t)), \alpha = 1, 2, \dots, \psi$ می‌باشد. با در نظر گرفتن [۱۸]:

$$M_j(x(t)) = [\underline{m}_j(x(t)), \bar{m}_j(x(t))], \quad (14)$$

$$\underline{m}_j(x(t)) = \prod_{\alpha=1}^w \underline{\mu}_{\tilde{N}_{j\alpha}}(g_\alpha x(t)) \geq 0 \quad (15)$$

$$\bar{m}_j(x(t)) = \prod_{\alpha=1}^w \bar{\mu}_{\tilde{N}_{j\alpha}}(g_\alpha x(t)) \geq 0 \quad (16)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{N}_{j\alpha}}(g_\alpha x(t)) \geq \underline{\mu}_{\tilde{N}_{j\alpha}}(g_\alpha x(t)) \geq 0 \quad \forall j \quad (17)$$

که در آن $\underline{\mu}_{\tilde{N}_{j\alpha}}(g_\alpha(x(t)))$ ، $\bar{\mu}_{\tilde{N}_{j\alpha}}(g_\alpha(x(t)))$ ، $\underline{m}_j(x(t))$ و $\bar{m}_j(x(t))$ به ترتیب درجه عضویت بالای ورودی α ام، درجه عضویت پایین ورودی α ام، وزن بالا و وزن پایین مربوط به زامین قانون فازی می‌باشند [۱۸]. در روابط (۱۳) تا (۱۷) فرض بر این است که متغیرهای فازی و توابع عضویت مربوط به کنترل‌کننده تابع حالت‌هایی از سیستم هستند که قابل اندازه‌گیری هستند و تعداد این قوانین کمتر یا مساوی تعداد قوانین فازی مربوط به مدل فازی سیستم و رویت گر می‌باشد. در نهایت قانون کنترل‌کننده که بصورت فیدبک حالت می‌باشد بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = \sum_{j=1}^c \tilde{m}_j(x(t)) G_j \hat{x}(t) \quad (18)$$

که در آن [۱۸]:

$$\tilde{m}_j(x(t)) = \frac{\underline{\beta}_j(x(t)) \underline{m}_j(x(t)) + \bar{\beta}_j(x(t)) \bar{m}_j(x(t))}{\sum_{k=1}^c (\underline{\beta}_k(x(t)) \underline{m}_k(x(t)) + \bar{\beta}_k(x(t)) \bar{m}_k(x(t)))} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^c \tilde{m}_j(x(t)) = 1 \quad (19)$$

که در آن $\underline{\beta}_j \in [0, 1]$ ، $\bar{\beta}_j \in [0, 1]$ متغیرهای از پیش تعریف شده می‌باشند که در رابطه $\underline{\beta}_j(x(t)) + \bar{\beta}_j(x(t)) = 1$ صدق می‌کنند و معمولا برابر ۰.۵ در نظر گرفته می‌شوند [۱۸].

۵- سیستم کنترل مبتنی بر مدل T-S سیستم، مدل T-S رویت گر و مدل T-S کنترل‌کننده

در طراحی رویت گر با تعریف سیگنال خطا بصورت رابطه زیر هدف پایداری سیگنال خطا و پایداری حالت‌های سیستم می‌باشد به طوری که اگر سیگنال خطا پایدار شود (به سمت صفر میل کند)، رویت گر حالت‌های سیستم را تخمین می‌زند [۱].

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (20)$$

در نتیجه کنترل‌کننده و رویت گر باید دو شرط (۱) و (۲) را که بصورت زیر می‌باشند برآورده کنند [۱]:

$$\begin{aligned} (1) \quad & x(t) \rightarrow 0 \quad \text{when } t \rightarrow \infty \\ (2) \quad & x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0 \quad \text{when } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (21)$$

با توجه به رابطه‌های (۷)، (۱۲)، (۱۸) و (۲۰) و در نظر گرفتن تساوی‌های زیر [۱۸]:

$$\sum_{i=1}^p \tilde{w}_i(x(t)) = \sum_{j=1}^p \tilde{m}_j(x(t)) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i(x(t)) \tilde{m}_j(x(t)) = 1 \quad (22)$$

دینامیک سیستم کنترل مبتنی بر مدل فازی T-S (۷)، رویت‌گر (۱۲) و کنترل‌کننده (۱۸) بصورت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i(x(t)) \tilde{m}_j(x(t)) \{ (A_i + B_i G_j) x(t) - B_i G_j e(t) \} \\ \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i(x(t)) \tilde{m}_j(x(t)) \{ (A_i - L_i C) e(t) \} \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن هدف پیدا کردن بهره‌های فیدبک حالت G_j و L_i می‌باشد به گونه‌ای که سیستم کنترل (۲۳) پایدار شود به طوری که حالت‌های سیستم به سمت صفر میل کنند و رویت‌گر تخمین مناسبی از حالت‌های سیستم را نتیجه دهد. در این قسمت برای سادگی به جای $\tilde{m}_j(x(t))$, $\tilde{w}_i(x(t))$ از \tilde{m}_j , \tilde{w}_i استفاده می‌شود.

۶- آنالیز پایداری

در این قسمت با توجه به رابطه (۲۳) متغیرهای حالت و ماتریس کلی سیستم حلقه بسته به ترتیب بصورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, Q_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i G_j & -B_i G_j \\ 0 & A_i - L_i C \end{bmatrix} \quad (24)$$

به طوری که رابطه (۲۳) به صورت رابطه زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j Q_{ij} x_a(t) \quad (25)$$

برای آنالیز پایداری سیستم حلقه بسته از طریق تعریف تابع لیاپانوف فازی بر مبنای مجموعه‌های فازی نوع ۲- و رویکرد non-PDC، شرط پایداری برای سیستم حلقه بسته بدست می‌آید. تابع لیاپانوف فازی بصورت رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$V(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j x_a(t)^T P_{ij} x_a(t) \quad (26)$$

$$P_{ij} = P_{ij}^T > 0, \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n} \quad \text{به طوری که:}$$

با توجه به رابطه (۲۵) معادله زیر برقرار می‌باشد:

$$2[x_a(t)^T M + \lambda \dot{x}_a(t)^T M] \times \left[\dot{x}_a(t) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j Q_{ij} x_a(t) \right] = 0 \quad (27)$$

که در آن $M \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ ماتریس کمکی متقارن در آنالیز پایداری و $\lambda > 0$ یک عدد حقیقی می‌باشد که باید تعیین شود. همچنین با توجه به تساوی رابطه (۲۲) و در نظر گرفتن این که وزن‌های فازی در نظر گرفته شده توابعی پیوسته و مشتق پذیر نسبت به زمان و حالت‌های سیستم می‌باشند [۹-۱۲] می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^p \dot{\tilde{w}}_i = \sum_{j=1}^c \dot{\tilde{m}}_j = 0 \quad (28)$$

که در آن $\dot{\tilde{m}}_j, \dot{\tilde{w}}_i$ مشتق زمانی وزن‌های فازی \tilde{m}_j, \tilde{w}_i می‌باشند. با تعریف ماتریس‌های $Y_i \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$, $S_j \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ از رابطه (۲۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^p \dot{\tilde{w}}_l x_a(t)^T S_j x_a(t) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, c \\ \sum_{l=1}^c \dot{\tilde{m}}_l x_a(t)^T Y_i x_a(t) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به رابطه‌های (۲۶)، (۲۷) و (۲۹)، $\dot{V}(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \dot{\tilde{w}}_i \tilde{m}_j x_a(t)^T P_{ij} x_a(t) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \dot{\tilde{m}}_j x_a(t)^T P_{ij} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j x_a(t)^T P_{ij} \dot{x}_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j (2x_a(t)^T P_{ij} \dot{x}_a(t) + \sum_{l=1}^p \dot{w}_l x_a(t)^T P_{lj} x_a(t) + \sum_{l=1}^c \dot{m}_l x_a(t)^T P_{il} x_a(t)) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j (2x_a(t)^T P_{ij} \dot{x}_a(t) + \sum_{l=1}^p \dot{w}_l x_a(t)^T (P_{lj} + S_j) x_a(t) + \sum_{l=1}^c \dot{m}_l x_a(t)^T (P_{il} + Y_i) x_a(t)) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j (2x_a(t)^T P_{ij} \dot{x}_a(t) + \sum_{l=1}^p \dot{w}_l x_a(t)^T (P_{lj} + S_j) x_a(t) + \sum_{l=1}^c \dot{m}_l x_a(t)^T (P_{il} + Y_i) x_a(t)) \\ &\quad + 2[x_a(t)^T M + \lambda \dot{x}_a^T(t) M] \times \left[\dot{x}_a(t) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j Q_{ij} x_a(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j (2x_a(t)^T P_{ij} \dot{x}_a(t) + \sum_{l=1}^p \dot{w}_l x_a(t)^T (P_{lj} + S_j) x_a(t) + \sum_{l=1}^c \dot{m}_l x_a(t)^T (P_{il} + Y_i) x_a(t)) \\ &\quad + 2x_a(t)^T M \dot{x}_a(t) - 2x_a(t)^T M Q_{ij} x_a(t) + 2\lambda \dot{x}_a(t)^T M \dot{x}_a(t) - 2\lambda \dot{x}_a(t)^T M Q_{ij} x_a(t) \end{aligned} \quad (30)$$

$$P_{ij} + S_j > 0, P_{ij} + Y_i > 0, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, c \quad \text{با فرض:}$$

و در نظر گرفتن کران بالای $\dot{\tilde{w}}_i$ و $\dot{\tilde{m}}_j$ بصورت رابطه زیر:

$$|\dot{\tilde{w}}_i| \leq \sigma_i, |\dot{\tilde{m}}_j| \leq \phi_j \quad (31)$$

که در آن $\sigma_i \geq 0$ و $\phi_j \geq 0$ می‌باشند، رابطه (۳۰) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j (2x_a(t)^T P_{ij} \dot{x}_a(t) + \sum_{l=1}^p \sigma_l x_a(t)^T (P_{lj} + S_j) x_a(t) + \sum_{l=1}^c \phi_l x_a(t)^T (P_{il} + Y_i) x_a(t)) \\ &\quad + 2x_a(t)^T M \dot{x}_a(t) - 2x_a(t)^T M Q_{ij} x_a(t) + 2\lambda \dot{x}_a(t)^T M \dot{x}_a(t) - 2\lambda \dot{x}_a(t)^T M Q_{ij} x_a(t) \end{aligned} \quad (32)$$

با استفاده از ماتریس M تعریف شده در رابطه (۲۷)، رابطه نامساوی (۳۲) بصورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j (2x_a(t)^T MM^{-1} P_{ij} M^{-T} M^T \dot{x}_a(t) + \sum_{l=1}^p \sigma_l x_a(t)^T MM^{-1} (P_{lj} + D_j) M^{-T} M^T x_a(t) \\ & + \sum_{l=1}^c \phi_l x_a(t)^T MM^{-1} (P_{il} + F_l) M^{-T} M^T x_a(t) + 2x_a(t)^T MM^{-1} MM^{-T} M^T \dot{x}_a(t) \\ & - 2x_a(t)^T MM^{-1} MQ_{ij} M^{-T} M^T x_a(t) + 2\lambda \dot{x}_a(t)^T MM^{-1} MM^{-T} M^T \dot{x}_a(t) \\ & - 2\lambda \dot{x}_a(t)^T MM^{-1} MQ_{ij} M^{-T} M^T x_a(t) \end{aligned} \quad (33)$$

در نهایت رابطه (۳۳) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j (2(M^T x_a(t))^T M^{-1} P_{ij} M^{-T} (M^T \dot{x}_a(t)) + \sum_{l=1}^p \sigma_l (M^T x_a(t))^T M^{-1} (P_{lj} + S_j) M^{-T} (M^T x_a(t)) \\ & + \sum_{l=1}^c \phi_l (M^T x_a(t))^T M^{-1} (P_{il} + Y_l) M^{-T} (M^T x_a(t)) + 2(M^T x_a(t))^T M^{-1} MM^{-T} (M^T \dot{x}_a(t)) \\ & - 2(M^T x_a(t))^T M^{-1} MQ_{ij} M^{-T} (M^T x_a(t)) + 2\lambda (M^T \dot{x}_a(t))^T M^{-1} MM^{-T} (M^T \dot{x}_a(t)) \\ & - 2\lambda (M^T \dot{x}_a(t))^T M^{-1} MQ_{ij} M^{-T} (M^T x_a(t)) \end{aligned} \quad (34)$$

با توجه به اینکه رابطه زیر از رابطه (۳۴)، که گسترش یافته رابطه (۲۷) است، برابر صفر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & 2(M^T x_a(t))^T M^{-1} MM^{-T} (M^T \dot{x}_a(t)) - 2(M^T x_a(t))^T M^{-1} MQ_{ij} M^{-T} (M^T x_a(t)) \\ & + 2\lambda (M^T \dot{x}_a(t))^T M^{-1} MM^{-T} (M^T \dot{x}_a(t)) - 2\lambda (M^T \dot{x}_a(t))^T M^{-1} MQ_{ij} M^{-T} (M^T x_a(t)) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

متغیرها و ماتریس‌های زیر با ابعاد مناسب تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} W &= M^{-1}, G_j = N_j W_1^{-T}, L_i = W_2^{-T} X_i, V_{ij} = W P_{ij} W^{-T}, E_j = W S_j W^T, I_i = W Y_i W^T, \\ \Upsilon_j &= \sum_{l=1}^p \sigma_l (V_{lj} + E_j), \Gamma_i = \sum_{l=1}^c \phi_l (V_{il} + I_l), \zeta(t) = W^{-T} x_a(t), \gamma(t) = W^{-T} \dot{x}_a(t); \\ i &= 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, c \end{aligned}$$

که در آن $W = \text{diag}[W_1, W_2]$ و ماتریس‌های W_1 و W_2 ماتریس‌های مثبت معین و متقارن می‌باشند. همچنین $N_j \in \mathcal{R}^{m \times n}, X_i \in \mathcal{R}^{n \times m}$ را

می‌توان بصورت رابطه زیر نوشت:

$$2 \begin{bmatrix} \zeta(t)^T & \gamma(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q_{ij} W^T & W^T \\ -\lambda Q_{ij} W^T & \lambda W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (36)$$

با توجه به رابطه (۳۶) رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} W^T & W^T \\ -\lambda Q_{ij} W^T & \lambda W^T \end{bmatrix} = 0 \quad (37)$$

با ضرب ماتریس‌های $D = \text{diag}[I_n, W_2^T, I_n, W_2^T]$ و $F = \text{diag}[I_n, W_2^{-T}, I_n, W_2^{-T}]$ به ترتیب در طرف چپ و راست ماتریس

رابطه (۳۷)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$2 \begin{bmatrix} \zeta(t)^T & \gamma(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_i W_1^T - B_i G_j W_1^T & B_i G_j & W_1^T & 0 \\ 0 & -W_2^T A_i + W_2^T L_i C & 0 & W_2^T \\ -\lambda A_i W_1^T - \lambda B_i G_j W_1^T & \lambda B_i G_j & \lambda W_1^T & 0 \\ 0 & -\lambda W_2^T A_i + \lambda W_2^T L_i C & 0 & \lambda W_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (38)$$

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} -A_i W_1^T - B_i N_j & B_i G_j \\ 0 & -W_2^T A_i + X_i C \end{bmatrix} \quad \text{با در نظر گرفتن:}$$

در نهایت رابطه (۳۴) را می‌توان بصورت رابطه زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j \begin{bmatrix} \zeta(t)^T & \gamma(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_j + \Gamma_i + \Xi_{ij} + \Xi_{ij}^T & [V_{ij} + W + \lambda \Xi_{ij}]^T \\ V_{ij} + W + \lambda \Xi_{ij} & \lambda(W + W^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \tilde{w}_i \tilde{m}_j \begin{bmatrix} \zeta(t)^T & \gamma(t)^T \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c w_i m_j \Omega_{ij} \\ \Omega_{ij} &= \begin{bmatrix} \Upsilon_j + \Gamma_i + \Xi_{ij} + \Xi_{ij}^T & [V_{ij} + W + \lambda \Xi_{ij}]^T \\ V_{ij} + W + \lambda \Xi_{ij} & \lambda(W + W^T) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

برای پایداری سیستم حلقه بسته باید $\dot{V} < 0$ باشد. مشاهده می‌شود اگر $\Omega_{ij} < 0$ باشد شرط $\dot{V} < 0$ برقرار می‌شود. نتایج آنالیز پایداری و طراحی در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه ۱: فرض کنید $\lambda > 0$ یک عدد حقیقی بوده و داشته باشیم $|\dot{\tilde{w}}_i| \leq \phi_j$ و $|\dot{\tilde{m}}_j| \leq \sigma_i$ به طوری که $\sigma_i \geq 0$ و $\phi_j \geq 0$. سیستم کنترل مبتنی بر مدل فازی T-S نوع ۲-فاصله‌ای (۲۳) تشکیل شده از مدل فازی سیستم (۷)، رویت گر فازی نوع ۲- (۱۲) و

کنترل کننده فازی نوع ۲- (۱۸) به صورت حلقه بسته پایدار است اگر ماتریس‌های زیر در نظر گرفته شوند:

$$\begin{aligned} S_j &= S_j^T \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}, Y_i = Y_i^T \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}, V_{ij} = V_{ij}^T \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}, E_j = E_j^T \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n} \\ I_i &= I_i^T \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}, N_j \in \mathfrak{R}^{m \times n}, X_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}, W = W^T \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}, W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \\ W_1 &= W_1^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}, W_2 = W_2^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \quad (i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, c), (c \leq p) \end{aligned}$$

به طوری که LMI های زیر بر آورده شوند:

$$V_{ij} > 0 \quad V_{ij} + E_j > 0, \quad V_{ij} + I_i > 0$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_j + \Gamma_i + \Xi_{ij} + \Xi_{ij}^T & [V_{ij} + W + \lambda \Xi_{ij}]^T \\ V_{ij} + W + \lambda \Xi_{ij} & \lambda(W + W^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, c), \quad (c \leq p)$$

که در آن:

$$\Upsilon_j = \sum_{i=1}^p \sigma_i (V_{ij} + E_j), \quad \Gamma_i = \sum_{j=1}^c \phi_j (V_{ij} + I_i), \quad \Xi_{ij} = \begin{bmatrix} -A_i W_1^T - B_i N_j & B_i G_j \\ 0 & -W_2^T A_i + X_i C \end{bmatrix}$$

در این صورت بهره‌های فیدبک حالت G_j و بهره‌های رویت گر L_i بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$G_j = N_j W_1^{-T}, \quad j = 1, 2, \dots, c$$

$$L_i = W_2^{-T} X_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

۷- مثال شبیه‌سازی

سیستم پاندول معکوس همراه با پارامترهای نامعین بصورت رابطه زیر را در نظر بگیرید که در آن تنها زاویه تغییر موضع پاندول $\theta(t)$ قابل اندازه‌گیری می‌باشد [۱۶]:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g \sin(\theta(t)) - a m_p L \dot{\theta}(t)^2 \sin(2\theta(t)) / 2 - a \cos(\theta(t)) u(t)}{4L / 3 - a m_p L \cos^2(\theta(t))} \quad (۴۰)$$

که در آن $\theta(t)$ زاویه تغییر موضع پاندول، g شتاب جاذبه، m_p جرم پاندول، M_c جرم ارابه، $a = 1 / (m_p + M_c)$ ، L طول پاندول و $u(t)$ نیروی وارد بر ارابه بر حسب نیوتون می‌باشد. محدوده تغییرات پارامترهای سیستم بصورت زیر می‌باشند:

$$m_p \in [m_{p \min} \quad m_{p \max}] = [2 \quad 3] \text{ kg}$$

$$M_c \in [M_{c \min} \quad M_{c \max}] = [8 \quad 16] \text{ kg}$$

$$2L = 1 \text{ m}$$

با در نظر گرفتن متغیرهای حالت بصورت زیر:

$$x_1(t) = \theta(t) \in [-5\pi/12 \quad 5\pi/12] \text{ (rad)}$$

$$x_2(t) = \dot{\theta}(t) \in [-5 \quad 5] \text{ (rad/s)}$$

معادلات حالت بصورت رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g - a m_p L x_2(t)^2 \cos(x_1(t)) \left(\frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)} \right)}{4L / 3 - a m_p L \cos^2(x_1(t))} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1(t))}{4L / 3 - a m_p L \cos^2(x_1(t))} \end{bmatrix} u(t) \quad (۴۱)$$

با توجه به معادلات (۴۱) متغیرهای فازی بصورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$f_1(x(t)) = \frac{g - a m_p L x_2(t)^2 \cos(x_1(t))}{4L/3 - a m_p L \cos^2(x_1(t))} \left(\frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)} \right), f_2(x_1(t)) = \frac{-a \cos(x_1(t))}{4L/3 - a m_p L \cos^2(x_1(t))} \quad (42)$$

با توجه به روابط (۱)، (۹) و (۴۲) مدل T-S سیستم (۴۱) بدست می‌آید که در آن:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{1\min} & 0 \end{bmatrix}, A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{1\max} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2\min} \end{bmatrix}, B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2\max} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$f_{1\min} = 10.0078, f_{1\max} = 18.4800, f_{2\min} = -0.1765, f_{2\max} = -0.0261$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C = [1 \quad 0]$$

در رابطه (۴۳) فقط از محدوده تغییرات حالت‌های واقعی سیستم برای تجزیه سیستم به زیر سیستم‌های خطی استفاده شده است در حالی که برای تعریف توابع عضویت تنها از حالت اول سیستم که قابل اندازه‌گیری می‌باشد استفاده می‌شود به طوری که تقریب مناسبی از سیستم واقعی بدست آید. توابع عضویت بالا و پایین مربوط به قانون‌های فازی مدل سیستم و رویت گر بصورت جدول زیر در نظر گرفته می‌شوند.

جدول ۱: توابع عضویت مربوط به مدل T-S پاندول معکوس

توابع عضویت بالا	توابع عضویت پایین
$\bar{\mu}_{M_1^1} = \bar{\mu}_{M_1^2} = 1 - 0.23e^{-\frac{x_1^2}{0.25}}$	$\underline{\mu}_{M_1^1} = \underline{\mu}_{M_1^2} = 1 - e^{-\frac{x_1^2}{1.2}}$
$\bar{\mu}_{M_1^3} = \bar{\mu}_{M_1^4} = e^{-\frac{x_1^2}{1.2}}$	$\underline{\mu}_{M_1^3} = \underline{\mu}_{M_1^4} = 0.23e^{-\frac{x_1^2}{0.25}}$
$\bar{\mu}_{M_2^1} = \bar{\mu}_{M_2^2} = e^{-\frac{x_1^2}{1.5}}$	$\underline{\mu}_{M_2^1} = \underline{\mu}_{M_2^2} = 0.5e^{-\frac{x_1^2}{0.25}}$
$\bar{\mu}_{M_2^3} = \bar{\mu}_{M_2^4} = 1 - 0.5e^{-\frac{x_1^2}{0.25}}$	$\underline{\mu}_{M_2^3} = \underline{\mu}_{M_2^4} = 1 - e^{-\frac{x_1^2}{1.5}}$

برای کنترل کننده نیز دو قانون فازی در نظر گرفته می‌شود که در اینجا متغیر فازی مربوط به کنترل کننده بصورت دلخواه و تابع متغیر حالت $x_1(t)$ که قابل اندازه‌گیری می‌باشد در نظر گرفته می‌شود به طوری که شرایط قضیه ۱ را برآورده کند. توابع عضویت

بالا و پایین مربوط به کنترل کننده با توجه به متغیر فازی $g_\alpha(x(t)) = e^{-\frac{x_1^2}{0.35}}$ و $\alpha = 1$ بصورت زیر می‌باشد:

$$\underline{m}_1(x_1) = \underline{\mu}_{N_1^1}(x_1) = \bar{m}_1(x_1) = \bar{\mu}_{N_1^1} = e^{-\frac{x_1^2}{0.35}}$$

$$\underline{m}_2(x_1) = \underline{\mu}_{N_1^2}(x_1) = \bar{m}_2(x_1) = \bar{\mu}_{N_1^2} = 1 - \bar{\mu}_{N_1^1}(x_1)$$

$$\underline{\beta}_j = \bar{\beta}_j = 0.5$$

برای بدست آوردن حد بالای وزن‌های فازی مدل سیستم و کنترل کننده می‌توان نوشت:

$$\dot{\bar{w}}_i = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x} \dot{x}(t), \dot{\bar{m}}_j = \frac{\partial \bar{m}_j}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \bar{m}_j}{\partial x} \dot{x}(t)$$

با توجه به اینکه \tilde{w}_i و \tilde{m}_j فقط تابع $x_1(t)$ می‌باشند، مشتق وزن‌های مدل فازی سیستم و مدل فازی کنترل‌کننده بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\dot{\tilde{w}}_i = \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_1} \times \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) \quad , \quad \dot{\tilde{m}}_j = \frac{\partial \tilde{m}_j}{\partial x_1} \times \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{m}_j}{\partial x_1} \dot{x}_1(t)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\tilde{w}_1[0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \tilde{w}_2[0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \tilde{w}_3[0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \tilde{w}_4[0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) \\ &= (\tilde{w}_1 x_2 + \tilde{w}_2 x_2 + \tilde{w}_3 x_2 + \tilde{w}_4 x_2) = x_2 \sum_{i=1}^4 \tilde{w}_i = x_2 \end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به محدوده تغییرات متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ حد بالای مشتق زمانی وزن‌های فازی مدل سیستم و مدل کنترل‌کننده بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{w}}_1| &\leq \sigma_1 = 30.99, & |\dot{\tilde{w}}_2| &\leq \sigma_2 = 95.77 \\ |\dot{\tilde{w}}_3| &\leq \sigma_3 = 7.80, & |\dot{\tilde{w}}_4| &\leq \sigma_4 = 19.79 \\ |\dot{\tilde{m}}_1| &\leq \phi_1 = 14.25, & |\dot{\tilde{m}}_2| &\leq \phi_2 = 14.25 \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۱ بهره‌های فیدبک حالت و رویت گر به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} G_1 &= [1217.5 \ 552.1], \quad G_2 = [1019.6 \ 554.2] \\ L_1 = L_2 &= \begin{bmatrix} 94.6296 \\ 121.1620 \end{bmatrix}, \quad L_3 = L_4 = \begin{bmatrix} 96.5089 \\ 130.1973 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نتایج شبیه‌سازی، پاسخ حالت‌های سیستم و سیگنال کنترلی را تحت شرایط اولیه مختلف زیر:

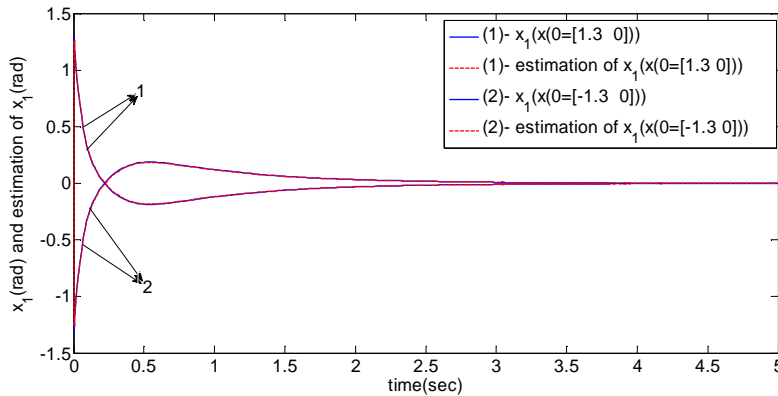
$$\begin{aligned} (1): & \begin{cases} X(0) = [1.3 \ 0]^T \\ \hat{X}(0) = [0 \ 0]^T \end{cases} \\ (2): & \begin{cases} X(0) = [-1.3 \ 0]^T \\ \hat{X}(0) = [0 \ 0]^T \end{cases} \end{aligned}$$

و جرم‌های مختلف (نامعینی)

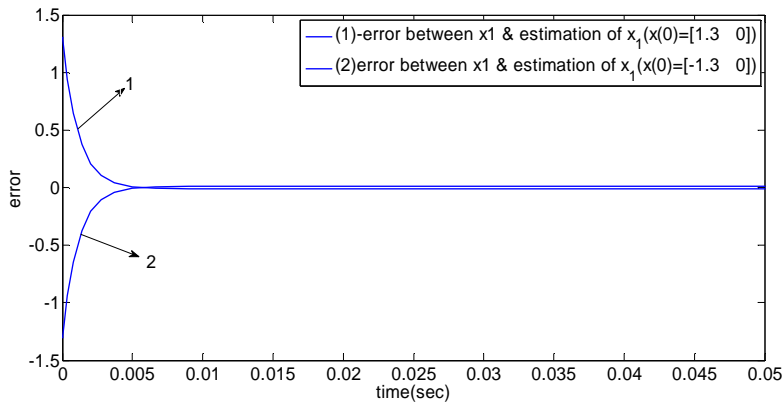
$$\begin{cases} m_p = m_{p \min} = 2 \text{ kg}, \quad M_c = M_{c \min} = 8 \text{ kg} \\ m_p = m_{p \max} = 3 \text{ kg}, \quad M_c = M_{c \max} = 16 \text{ kg} \end{cases}$$

نشان می‌دهد. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که کنترل‌کننده به خوبی سیستم غیرخطی پاندول معکوس را در حضور جرم‌های مختلف m_p و M_c و شرایط اولیه مختلف پایدار کرده و رویت گر به خوبی حالت‌های سیستم را تخمین زده است که نمونه یک کنترل‌کننده و رویت گر مقاوم می‌باشند. شکل (۱) پاسخ حالت $x_1(t)$ و تخمین آن را برای شرایط اولیه و جرم‌های مختلف نشان می‌دهد که با توجه به آن مشاهده می‌شود پاسخ حالت و تخمین آن تقریباً بر روی هم افتاده‌اند که نشان می‌دهد رویت گر به خوبی

حالت $x_1(t)$ را تخمین زده است. شکل (۲) خطای تخمین بین حالت $x_1(t)$ و تخمین آن را برای شرایط اولیه و جرم‌های مختلف نشان می‌دهد که در کمترین زمان به سمت صفر میل شده است.

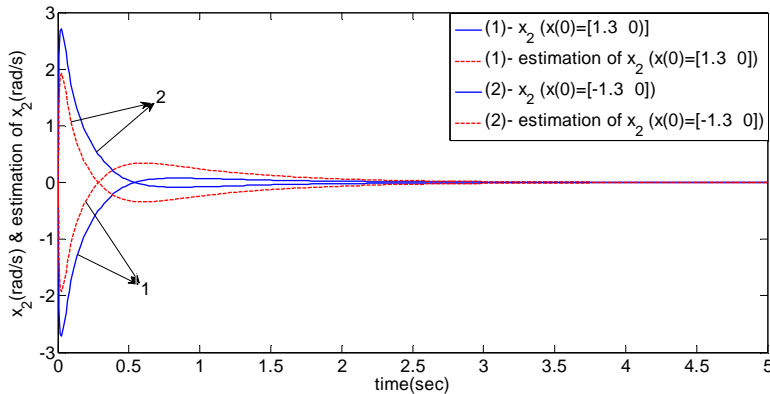


شکل ۱: پاسخ $x_1(t)$ و تخمین آن برای مقادیر $M_c = 8$ و $m_p = 2$

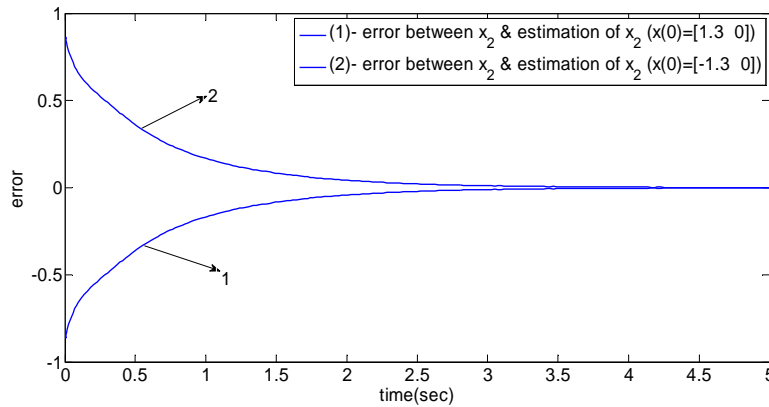


شکل ۲: خطای بین $x_1(t)$ و تخمین آن برای $M_c = 8$ و $m_p = 2$

شکل (۳) پاسخ حالت $x_2(t)$ و تخمین آن را برای شرایط اولیه و جرم‌های مختلف نشان می‌دهد که با توجه به آن مشاهده می‌شود رویت‌گر به خوبی حالت $x_2(t)$ را تخمین زده است. شکل (۴) خطای تخمین بین حالت $x_2(t)$ و تخمین آن را برای شرایط اولیه و جرم‌های مختلف نشان می‌دهد که به سمت صفر میل شده است.

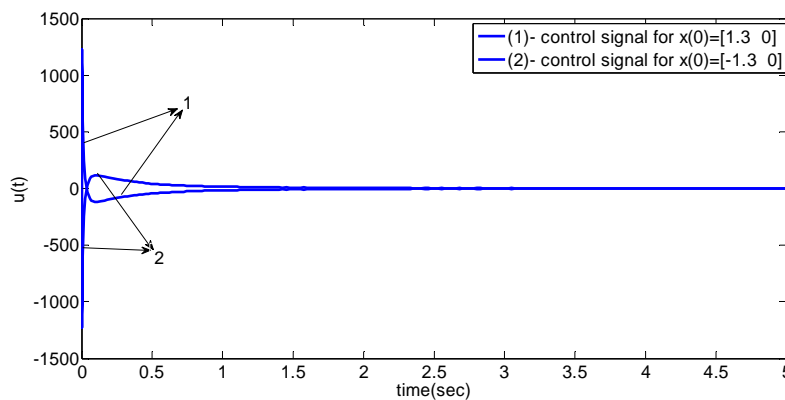


شکل ۳: پاسخ $x_2(t)$ و تخمین آن برای مقادیر $M_c = 8$ و $m_p = 2$



شکل ۴: خطای بین $x_2(t)$ و تخمین آن برای $M_c = 8$ و $m_p = 2$

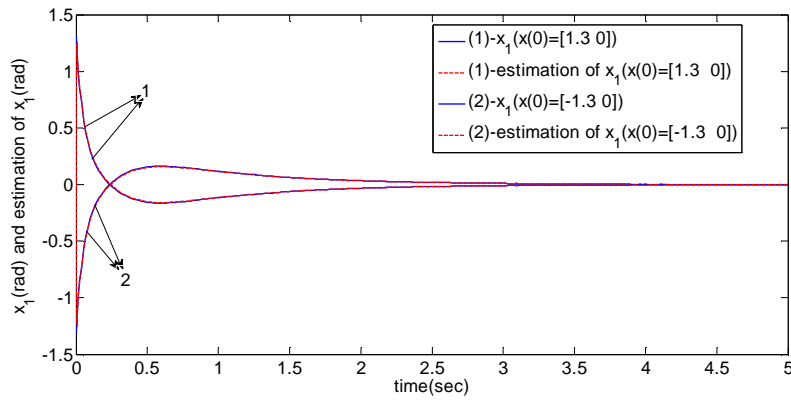
شکل (۵) سیگنال‌های کنترلی برای مقادیر $M_c = 8$ و $m_p = 2$ و شرایط اولیه مختلف را نشان می‌دهد.



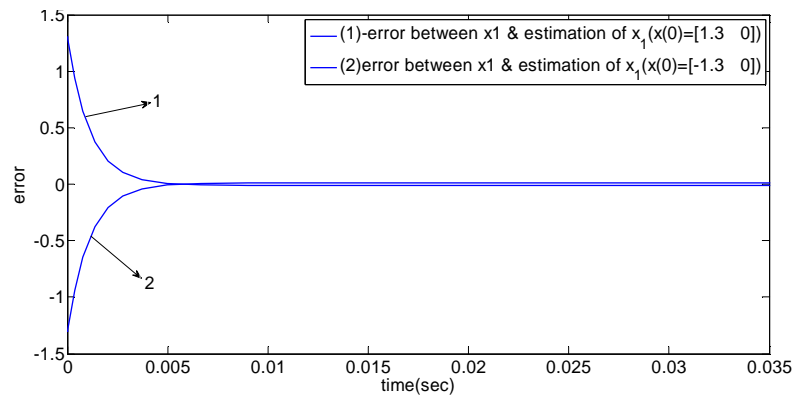
شکل ۵: سیگنال کنترلی $u(t)$ برای $M_c = 8$ و $m_p = 2$

برای نشان دادن مقاوم بودن کنترل‌کننده و رویت‌گر در مقابل نامعینی (جرم‌های مختلف)، شبیه‌سازی‌ها برای مقادیر $M_c = 16$ و $m_p = 3$ و شرایط اولیه مختلف انجام شده است. شکل (۶) پاسخ حالت $x_1(t)$ و تخمین آن را برای شرایط اولیه و جرم‌های مختلف نشان می‌دهد که با توجه به آن مشاهده می‌شود پاسخ حالت و تخمین آن تقریباً بر روی هم افتاده‌اند که نشان می‌دهد رویت‌گر به خوبی حالت $x_1(t)$ را تخمین زده است. شکل (۷) خطای تخمین بین حالت $x_1(t)$ و تخمین آن را برای شرایط اولیه و جرم‌های مختلف نشان می‌دهد که در کمترین زمان به سمت صفر میل شده است.

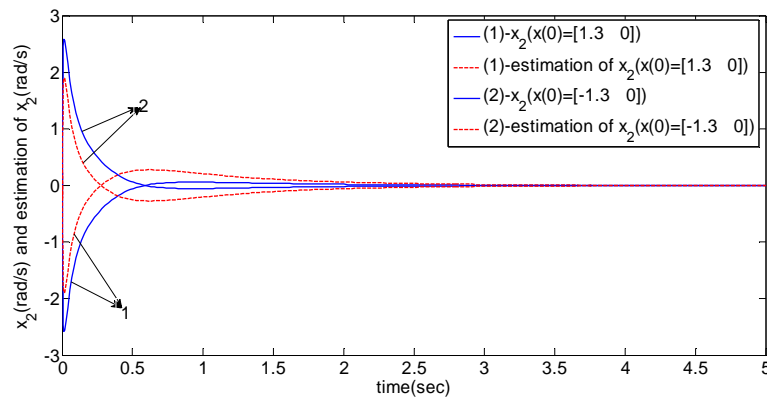
شکل (۸) پاسخ حالت $x_2(t)$ و تخمین آن را برای شرایط اولیه و جرم‌های مختلف نشان می‌دهد که با توجه به آن مشاهده می‌شود رویت‌گر به خوبی حالت $x_2(t)$ را تخمین زده است. شکل (۹) خطای تخمین بین حالت $x_2(t)$ و تخمین آن را برای شرایط اولیه و جرم‌های مختلف نشان می‌دهد که به سمت صفر میل شده است.



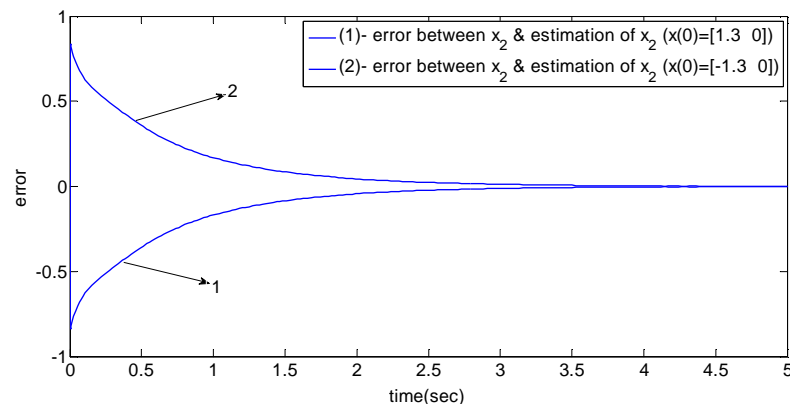
شکل ۶: پاسخ $x_1(t)$ و تخمین آن برای $m_c = 3$ و $M_c = 16$



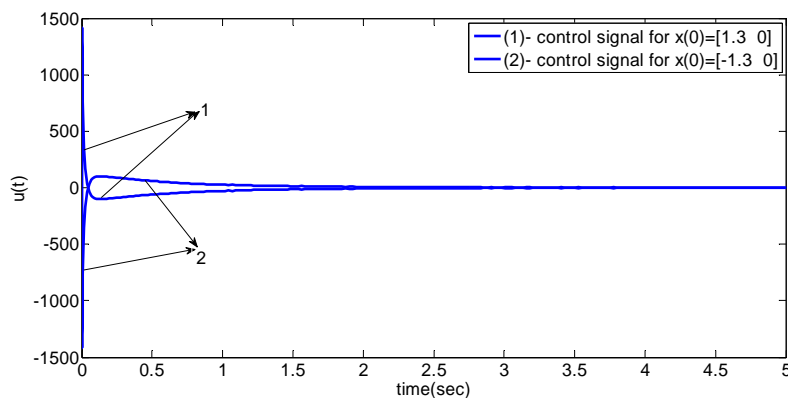
شکل ۷: خطای بین $x_1(t)$ و تخمین آن برای $m_p = 3$ و $M_c = 16$



شکل ۸: پاسخ $x_2(t)$ و تخمین آن برای مقادیر $m_p = 3$ و $M_c = 16$



شکل ۹: خطای بین $x_2(t)$ و تخمین آن برای $M_c = 16$ و $m_p = 3$



شکل ۱۰: سیگنال کنترلی $u(t)$ برای $M_c = 16$ و $m_p = 3$

برای توجیه اینکه تخمین حالت $x_1(t)$ از حالت $x_2(t)$ بهتر می‌باشد بصورت زیر عمل می‌شود:

$$e_1 = x_1(t) - \hat{x}_1(t) \rightarrow \dot{e}_1 = \dot{x}_1(t) - \dot{\hat{x}}_1(t)$$

$$e_2 = x_2(t) - \hat{x}_2(t) \rightarrow \dot{e}_2 = \dot{x}_2(t) - \dot{\hat{x}}_2(t)$$

با توجه به رابطه ۴۱ و روابط بالا می‌توان نوشت:

$$e_2 = \dot{e}_1 + \hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)$$

با توجه به اینکه خطای تخمین حالت $x_2(t)$ بصورت رابطه‌ای برحسب مشتق خطای تخمین حالت $x_1(t)$ بدست می‌آید و اینکه خطای تخمین حالت $x_1(t)$ در زمانی خیلی کم صفر می‌شود بنابراین مشتق آن از لحاظ عددی مقدار بزرگی خواهد شد که در رابطه مربوط به خطای $x_2(t)$ ظاهر می‌شود. در نتیجه تخمین حالت $x_1(t)$ از حالت $x_2(t)$ بهتر می‌باشد.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا با استفاده از مدل فازی T-S و منطق فازی نوع-۲ فاصله‌ای به مدل‌سازی فازی سیستم‌های غیرخطی نامعین پرداخته شد. سپس بر اساس همین مدل به مدل‌سازی رویت گرها و کنترل‌کننده‌های فازی پرداخته شد. در این مقاله با استفاده از

تابع لیاپانوف فازی نتایج آنالیز پایداری برای سیستم کنترل مبتنی بر مدل فازی سیستم، رویت‌گر و کنترل‌کننده تحت یک قضیه بصورت نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI) بیان شد. در اکثر روش‌های طراحی در گذشته استفاده از تابع لیاپانوف عمومی برای آنالیز پایداری و رویکرد جبران‌سازی توزیع شده موازی (PDC) برای طراحی استفاده شده است. استفاده از رویکرد جبران‌سازی توزیع شده غیرموازی (non-PDC) باعث ساده شدن کنترل‌کننده شد به طوری که طراح می‌تواند با در نظر گرفتن حداقل قوانین فازی برای کنترل‌کننده، پیاده‌سازی آسان‌تری نسبت به رویکرد PDC داشته باشد. با توجه به نتایج شبیه‌سازی مشاهده شد کنترل‌کننده‌ای که با این ساختار طراحی می‌شود دارای ساختاری مقاوم می‌باشد. همچنین رویت‌گر فازی نوع ۲-فاصله‌ای برای مقادیر مختلف نامعینی، حالت‌های سیستم را به خوبی تخمین می‌زند که نمونه یک رویت‌گر فازی مقاوم می‌باشد.

مراجع

- [1]. K. Tanka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability conditions and LMI based Design", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 6, no.2, pp.250-265, 1998.
- [2]. Chen, B.S., Teng, C.S., Uang, H.J. "Mixed H_2 / H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: an LMI approach", IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol 8, pp. 249-265, 2002.
- [3]. Liu, X., Zhang, Q. "New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for Takagi – Sugeno fuzzy systems via LMI", Automatica, vol. 39 , pp. 1571-1582, 2003.
- [4]. Lin, C., Wang, Q.G., Lee, T.H, "Improvement on observer- based H_∞ control for T-S fuzzy systems", Automatica, vol 41, pp. 1651-1656, 2005.
- [5]. Yoneyama, J., Nishikawa, M., Katayama, H., Ichikawa, A.: 'Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems', Fuzzy Sets Syst, vol 111, pp. 253–266, 2000
- [6]. Ma, X.J., Sun, Z.Q., He, Y.Y. "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observers", IEEE Trans. Fuzzy Sys., vol 6, pp. 41-51, 2002.
- [7]. Teixeira, M.C.M., Assuncao, E., Avellar, R.G. "On relaxed LMI-based design for fuzzy regulators and fuzzy observers", IEEE trans. Fuzzy Syst, vol 11, pp.613-623, 2003.
- [8]. Tseng, C.S. "A novel approach to H_∞ decentralized fuzzy-observer-based fuzzy control design for nonlinear interconnected systems", IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol 16, 2008.
- [9]. K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems", IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol 11, no. 4, pp. 582-589, Aug. 2003.
- [10]. K. Tanaka, T.Hori and H.O.Wang, "A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov function", IEEE Transactions on Fuzzy systems, vol.15, no.3, pp. 333-341, 2007.
- [11]. H. K. Lam, "Stability analysis of TCS fuzzy control systems using parameter-dependent Lyapunov function", IET control theory & Applications, vol.3, no.6, pp. 550-762, 2009.

- [12]. D.H.Lee, J.B.Park and Y.H.Joo, "A New Fuzzy Lyapunov function for relaxed stability condition of continuous – time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems. vol 19. no.4, pp. 785-791, 2011.
- [13]. L. A. Mozeli, R.M Palhares, F.O.Souza and E.M.A.M.Mendes, "Reducing conservativeness in recent stability condition of T-S fuzzy systems", Automation, vol.45, no.6, , pp.1580-1583, 2009.
- [14]. Tao Zhao, Jian Xiao, ye Li and YiXing Li, "A Fuzzy Lyapunov Function Approach to Stabilization of Interval Type-2 T-S Fuzzy Systems", IEEE Control and Decision Conferences (CCDC)., pp.2234-2238, 2013.
- [15]. J.M. Mendel, R.I. John, and F.Liu, " Interval type-2 fuzzy logic systems made simple," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 14, no.6, pp. 808-821, Dec. 2006.
- [16]. H. K. Lam and L. D. Seneviratne," Stability analysis of interval type-2 fuzzy-model-based- control systems," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern. vol.38, no.3, pp. 617-628, Jun.2008.
- [17]. H. K. Lam, M. Narimani, and L.d senevirtane, " LMI-based stability conditions for interval type-2 fuzzy logic based control systems, " in proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst., pp. 298-303, 2011.
- [18]. Lam, H.K.; Hongyi Li; Deters, C.; Secco, E.L.; Wurdemann, H.A.; Althoefer, K., "Control Design for Interval Type-2 Fuzzy Systems Under Imperfect Premise Matching", Industrial Electronics, IEEE Transactions on , vol.61, no.2, pp.956-968, Feb. 2014.