طراحی کنتـرل‌کننده H_∞ بازخورد خروجی مقاوم تحت اشباع برای کنترل وضعیت کلاسی از ماهواره‌های مرتبه کسری آشوبناک به همراه کاهش اثر اغتشاش

محمد فیوضی[1] و سعید شمقدری[2]

[1]دانشجوی دکتری مهندسی برق، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران،
mohammad.fiuzy@yahoo.com

[2] **نویسنده مسئول،** دانشیار دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران،
shamaghdari@iust.ac.ir

دانشگاه صنعتی سهند

DOR:
20.1001.1.23223146.1401.9.2.1.9

نشریه سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق

دوره ۱۰ – شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۲

صفحات ۱۰۱ الی ۱۲۶

ISSN: 2322-3146

http://journals.sut.ac.ir/jnsee

چکیده

کنترل وضعیت ماهواره‌ها بر اساس ماموریتی که دارند، همیشه از چالش‌های اساسی محققین حوزه فضایی بوده است. هنگام قرار گیری کلاس خاصی از ماهواره‌ها در وضعیت از پیش تعیین شده، رفتار آشوبناک در آن‌ها ایجاد می‌شود. بر همین اساس مدل‌های گوناگونی برای تحلیل این رفتار ارائه شده است. در این مقاله، کنترل‌کننده بازخورد خروجی مقاوم H_∞ تحت اشباع عملگر، برای این کلاس از ماهواره‌ها که تحت اغتشاش خارجی نیز هستند، طراحی شده است. نقطه قوت اصلی در این مقاله در واقع طراحی کنترل‌کننده در شرایط مذکور در قالب یک مساله نامساوی ماتریسی خطی (LMI) می‌باشد. برای اولین بار در این حوزه، ناحیه پایدار (B_ϵ) مبتنی بر تئوری پایداری لیاپانوف بدست آمده است که در نهایت ناحیه جذب (ROA) این سیستم کنترل نیز، گسترش یافته است. روش پیشنهادی بر روی مدل مربوطه شبیه سازی شده و نتایج، نشان می‌دهند که علاوه بر همگرایی مناسبِ حالت‌های سیستم، سیگنال کنترلی با هزینه و انرژی کمتر، بدون وارد شدن به ناحیه اشباع، سیستم را پایدار کرده است. طراحی کنترل‌کننده بازخورد خروجی ایستا در قالب یک شبه کد به همراه شبیه‌سازی، ارائه شده است که در مقایسه با کارهای دیگر، گویای برتری روش پیشنهادی می‌باشند.

واژه‌های کلیدی

سیستم‌های مرتبه کسری،

آشوب در ماهواره،

کنترل بازخورد ایستای خروجی،

اشباع عملگر،

شاخص H_∞،

پایداری مقاوم مبتنی بر لیاپانوف.

Sahand University of Technology

DOR: 20.1001.1.23223146.1401.9.2.1.9

Journal of Nonlinear Systems in Electrical Engineering

Vol.10, No.2

Autumn and Winter 2023

ISSN: 2322 – 3146

http://journals.sut.ac.ir/jnsee

Output Feedback for Attitude Control of Fractional-Order H_∞ Chaotic Satellite Systems Subject to Input Saturation with Disturbance Attenuation

Mohammad Fiuzy[1] **and Saeid Shamaghdari**[2]

[1] Ph.D. Student, Department of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, mohammad.fiuzy@yahoo.com

[2]**Corresponding Author**, Associate Prof., Department of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, shamaghdari@iust.ac.ir

ABSTRACT

Satellites attitude control based on their mission always is one of the main challenges in their control. In certain types of satellites, an oscillating or chaotic behavior can occur when they are placed in a predetermined attitude or axis. So, various models have been proposed to analyze this behavior. In this paper, H_∞ output feedback controller is designed for satellites subject to external disturbances and input saturation. The focus of this paper is on designing a static output feedback (SOF) controller by solving a linear matrix inequality (LMI) problem under specific conditions. The stable region (B_ϵ) is then determined using Lyapunov's theorem, which ultimately expands the region of attraction (ROA) for the control system. The proposed method was successfully applied to the presented model, and the results demonstrate that the system states converged at an appropriate speed. Additionally, the control signal does not enter the saturation level, and the system become stable with minimal cost and energy. A pseudo-code is introduced to specify the design procedure of the output feedback controller.

Keywords

fractional order system,

chaotic satellite systems,

static output feedback,

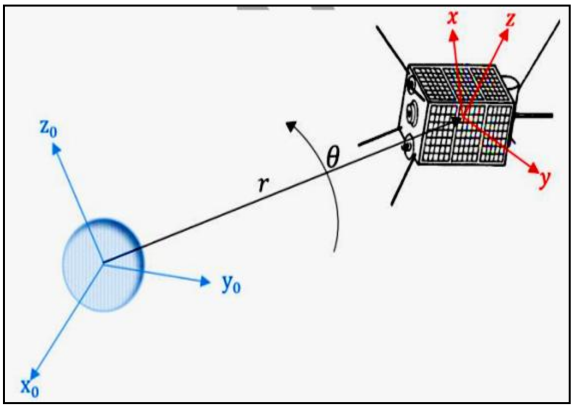
input saturation,

H_∞ index,

Lyapunov robust stability.

۱- مقدمه

قابلیت‌های فضایی انسان از سال ۱۹۵۷ که اسپوتنیک[1] به فضا پرتاب شد، به طور چشمگیری افزایش یافته است. دنیای امروز از فناوری فضایی[2] به ویژه در حوزه ارتباطات، خدمات موقعیت‌یابی، رصد زمین و ماموریت‌های اقتصادی بسیار سود می‌برد. از اصلی ترین مسائل کنترلی در ماموریت ماهواره‌ها، کنترل وضعیت به منظور جای‌گیری دقیق آن‌ها می‌باشد. شمایی از کنترل وضعیت ماهواره در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل ۱- نمایی اقتباسی از مفهوم کنترل وضعیت در ماهواره

تحقیقات گوناگونی در راستای کنترل وضعیت ماهواره‌ها انجام شده است. خانواده کنترل مدلغزشی یکی از وسیع ترین روش‌های کنترل در این حوزه می‌باشد. تلاش برای حذف بخش‌های غیرخطی سیستم با حضور نامعینی یا اغتشاشات دلیل استفاده از این روش‌ها می‌باشد. کنترل مدلغزشی ترمینال[3] در مراجع [۱و۲]، کنترل مدلغزشی انتگرالی در ماهواره‌های صلب[4] در [۳و۴] و همچنین کنترل بهینه مدلغزشی بر مبنای کواترنین در [۵و۶] ارائه شده‌اند، که نتیجه اغلب آن‌ها حذف نسبتاً موفق پدیده وزوز[5]، غلبه براغتشاش خارجی و نامعینی می‌باشد. در [۷] روش کنترلی پس گام تطبیقی[6] ارائه شده است که درآن نیازی به شرط کرانداری نامعینی‌ها و اغتشاشات نیست. در یکی دیگر از تحقیقات، روش کنترل بهینه وضعیت ماهواره بدون مدل[7]، اثبات و تشریح شده است [۸]، که در آن از تئوری برنامه ریزی پویا[8] و داده‌های ورودی و خروجی برای طراحی کنترل‌کننده استفاده شده است. روش‌های مختلف کنترل بدون مدل مانند تقریب تصادفی اختلالات به صورت همزمان[9](SPSA) بر پایه‌ی کنترل داده محور[10] در [۹] بحث و بررسی شده‌اند. همچنین ایده‌های کنترل تطبیقی بدون مدل[11](MFAC) در نتایج [۱۰و۱۱] و خطی سازی سیستم دینامیکی توسط روش PPD[12] در مراجع [۱۲و۱۳] ارائه شده‌اند که در آنها تخمینی از مدل توسط سازوکاری انجام شده است. بر اساس روش‌های کنترل مبتنی بر

[1] Sputnik
[2] Space Technology
[3] Sliding Mode Control
[4] Solid Satellite
[5] Chattering
[6] Adaptive Backstepping Control
[7] Model free
[8] Dynamic Programing
[9] Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation
[10] Data Driven Control
[11] Model Free Adaptive Control
[12] Pseudo Partial Derivative

فرآیند یادگیری[1]، پژوهشی در [۱۴] ارائه شده است که در آن راهبرد بهینهٔ سیستم‌های خطی درجهٔ دوم مربوط به مساله کنترل بهینه وضعیت ماهواره با استفاده از تئوری یادگیری Q ارائه شده است.

همانطور که مطرح شد، با استفاده از مدل‌سازی به روش آشفتگی تکین[2]، نوعی کنترل‌کننده مقاوم H_∞ غیرخطی در [۱۵] طراحی شده است. می‌توان گفت، مساله کنترل وضعیت از دیدگاه‌های مختلف بررسی و کنترل‌کننده های متنوعی همچون تئوری کنترل غیرخطی H_∞، ایده گام به عقب و کنترل بازخورد کواترنینی غیرخطی طرح و ارائه شده‌اند [۲۰-۱۶]. در تحقیقات بروزتر از مدل منعطف برای مدل‌سازی ماهواره استفاده شده است، به عنوان مثال با استفاده از مدل منعطف خطی و تئوری کنترل H_∞، مساله کنترل وضعیت در [۲۱و۲۲] بررسی شده است. اخیرا از کنترل‌کنندهPID ساختار متغیر[3]به همراه همگرایی و قوام پایدار مناسب استفاده شده است. نکته اصلی این تحقیق، طراحی ساختار متغیر بهره‌های تناسبی و مشتقی با روش ابداعی می‌باشد [۲۳]. در پژوهشی دیگر، ابتدا سعی شده است تا ماهواره با استفاده از روش برنامه ریزی کنترل مسیر، هدایت شود. ورودی‌های کنترل ماهواره به صورت اسپلاین مکعبی[4]با برخی پارامترهای ناشناخته فرض می‌شوند. پارامترهای اسپلاین با به حداقل رساندن یک تابع هزینه تعریف شده به گونه‌ای تعیین می‌شوند که وضعیت ماهواره مقادیر از پیش تعیین شده مورد نظر را دنبال کنند [۲۴].

به منظور جبران اغتشاش در مرجع [۲۵] روشی پیشنهاد شده است که ابتدا شبکه عصبی توسعه داده می‌شود و سپس یک الگوریتم حداقل مربعات متعامد برای پیاده سازی الگوریتم یادگیری پیشنهاد می‌شود. اخیراً تلاش عمده محققین در این راستا بوده است که بتوانند سیستم کنترل پیشنهادی را پیاده سازی نمایند. در یکی از کاربردی ترین تحقیقات در قالب بستر سخت افزار در حلقه، ساز و کاری فراهم شده است که در آن سخت افزار و تمام عملگرها و زیرسیستم‌ها، امکان انجام آزمون‌های عملیاتی را داشته باشند تا رفتار کنترل‌کننده مقاوم پیاده سازی شده، بررسی و اثبات شود [۲۶]. در یکی دیگر از تحقیقات، از یک نانو ماهواره آزمایشگاهی و سیستم آزمایش آن برای مقایسه تجربی عملکرد یک کنترل‌کننده منطق فازی، یک کنترل‌کننده PID و یک کنترل‌کننده PID اصلاح‌شده استفاده شده است [۲۷]. در پژوهشی دیگر طراحی و عملکرد قابل دستیابی با کنترل وضعیت آیرودینامیکی فعال در مدار بسیار پایین زمین، یعنی در ارتفاع زیر ۴۵۰ کیلومتر، مورد بحث قرار گرفته است. این الگوریتم مبتنی بر روش تابلویی[5] برای محاسبه ضرایب آیرودینامیکی بوده و بر تخمین پارامترهای محیطی تقریبی و فرضیات بدترین سناریو متکی است [۲۸].

سیستم کنترل وضعیت یکی از زیر سیستم‌های حیاتی ماهواره‌ها می‌باشد که نقش بسزایی در انجام ماموریت‌های ماهواره‌ای دارد. مانورهای گوناگونی که ماهواره برای دست یابی به وضعیت دورانی از پیش تعیین شده باید انجام دهد، مانند جهت گیری نسبت به زمین یا خورشید و جهت گیری اولیه برای انجام مانور مداری، مثال‌هایی از اهمیت کنترل وضعیت می‌باشند که این امر توسط سیستمی متشکل از حسگرها، عملگرها، نرم افزارها و سخت افزارها انجام می‌شود. در واقع سیستم کنترل وضعیت، برای نگه داشتن سرعت چرخش ماهواره با نرخ معین دور در دقیقه استفاده می شود. تثبیت محور چرخش مورد نیاز برای جمع آوری داده‌ها برای دوره‌های طولانی در یک مسیر دایروی بزرگ و توانایی مانور دادن محور چرخش به جهت گیری جدید، مهم ترین نقش سیستم کنترل وضعیت می‌باشد. هنگام قرارگیری نوعی خاص از ماهواره‌ها در وضعیت مورد نظرشان، این نوع از ماهواره‌ها دچار رفتار

[1]Learning Based Method
[2]Singular
[3]Variable Structure
[4]Cubic spline
[5]panel method

نوسانی و آشوبناک می‌شوند که در مرور تحقیقات گذشته، تمرکز بسیار کمتری توسط دیگر محققین بر روی این رفتار شده است. این فضای خالی، انگیزه اصلی را به منظور ارائه روشی در راستای پایدار سازی وضعیت این نوع از ماهوره‌ها با اهمیت بالایی که دارند، ایجاد می کند.

یکی از موانع اساسی در ماهواره‌های آشوبناک، طراحی کنترل‌کننده بازخورد خروجی تحت اشباع می‌باشد. در واقع در این مقاله کنترل‌کننده مقاوم مبتنی بر تئوری H_∞ ارائه می‌شود تا ضمن غلبه بر پدیده اشباع، سیستم کنترل در مقابل اغتشاش خارجی، قوام و کارایی مناسبی داشته باشد و نیز پایداری آن حفظ شود. گسترش ناحیه جذب (ROA) و یافتن ناحیه پایدار (B_ϵ) نیز همانند طراحی کنترل‌کننده ، در قالب یک راهکار ماتریسی خطی ارائه می‌شود.

پس از بررسی و مرور منابع مختلف و بیان انگیزه مقاله در مقدمه، در بخش دوم پیش نیازهای لازم در حسابان و کنترل سیستم‌های مرتبه کسری ارائه می‌شوند. سپس در بخش سوم سیستم کنترل وضعیت مرتبه کسری ماهواره ارائه می‌شود. در بخش چهارم طراحی کنترل‌کننده و تحلیل پایداری سیستم کنترل وضعیت ماهواره ارائه می‌شود، و در بخش‌های انتهایی پس از گسترش ناحیه جذب، مثال‌هایی به همراه شبیه سازی آنها در کنار نتیجه گیری ارائه می‌شود.

۲- پیش نیازهای لازم در کنترل سیستم‌های مرتبه کسری

ابزار حسابان مرتبه کسری بعد از تکامل به طریق عمده با ارتقاء کیفیت مدل‌سازی و ارتقاء کارایی کنترل‌کننده هاباعث بهبود کارایی حلقه‌های کنترلی شده است [۲۹]. حسابان مرتبه کسری در اینجا بر اساس اپراتور${}_0^C D_t^\alpha$می‌باشد که بیانگر مشتق و انتگرال کسری می‌باشند. اپراتورمشتق-انتگرال کسری به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود.

$$ {}_0^C D_t^\alpha = \begin{cases} \dfrac{d^\alpha}{dt^\alpha} & a \in R^+ \\ 1 & a = 1 \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} d(\theta)^{-\alpha} & a \in R^- \end{cases} \quad (۱) $$

مشتق و انتگرال کسری دارای تعاریف مختلفی هستند که در این مقاله از تعریف مشتق کپوتو ${}_0^C D_t^\alpha$ مطابق رابطه (۱) استفاده می‌شود[۳۰].

$$ {}_0^C D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \quad (۲) $$

در رابطه (۲)، m اولین عدد صحیح بزرگتر از α است و $0 < \alpha < 1$ مرتبه عملگر مشتق می‌باشد، که $\binom{\alpha}{i}$ به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود.

$$ \binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha!}{i!\,(\alpha - i)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha-i+1)} \quad (۳) $$

در رابطه فوق تابع $\Gamma(.)$ نیز به صورت (۴) محاسبه می گردد[۲۹].

$$\Gamma(x) = \int_0^t e^{-t} t^{x-1} dt\,, \qquad x \in R^+ \cup \{0\} \tag{۴}$$

قضیه۱: فرض کنید $V = \frac{1}{2}x^T P x\,,\ x \in R^n$ یک تابع پیوسته مشتق پذیر باشد. آنگاه نامساوی (۵) برقرار است [۳۱و۳۰]، که در آن $P \in R^{n\times n}$ ثابت، مربعی، متقارن و مثبت معین می‌باشد.

$${}_0^C D_t^\alpha V \leq x^T P\, {}_0^C D_t^\alpha x, \qquad \forall \alpha \in (0,1), \forall t \geq t_0 \tag{۵}$$

لم ۱: برای هر دو بردار T و Y، یک اسکالر مثبت به صورت $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوریکه رابطه (۶) برقرار است[۲۹].

$$T^T Y \leq \epsilon T^T T + \epsilon^{-1} Y^T Y \tag{۶}$$

قضیه۲: برای هر سیستم خطی مرتبه کسری به صورت ${}_0^C D_t^\alpha x = Ax$ اگر وجود داشته باشد ماتریس مثبت معین P به طوریکه رابطه (۷) برقرار باشد، آنگاه سیستم خطی مرتبه کسری پایدار مجانبی است[۲۹].

$$\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right)^T P + P\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right) < 0 \tag{۷}$$

فرض ۱: فرض کنید f تابع لیپشیتز[1] و پیوسته است، آنگاه یک مقدار ثابت مثبت معین مانند $L \in R^n$ با نام ثابت لیپشیتز وجود دارد بطوریکه برای هر $u, v \in R^n$ رابطه (۸) برقرار است[۲۹].

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\| \tag{۸}$$

لم۲: غیر خطی بخشی[2] $S(\gamma K, u_0)$ را در رابطه (۹) در نظر بگیرید:

$$S(\gamma K, u_0) = \{x(t) \in R^n | -u_0 \leq \gamma K x(t) \leq u_0\} \tag{۹}$$

که $\gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ با $0 < \gamma_i \leq 1$ برای همه $i = 1, \dots, m$. اگر $x(t)$ متعلق به $S(\gamma K, u_0)$ باشد، آنگاه رابطه (۱۰) در قالب نامساوی‌های زیر برقرار می‌باشند[۲۹]:

$$\begin{aligned} &1\text{-}\quad \left(\mathrm{sat}\big(Kx(t) - \gamma K x(t)\big)\right)^T \left(\mathrm{sat}(Kx(t) - Kx(t)\right) \leq 0 \\ &2\text{-}\quad \psi\big(t, x(t)\big)^T \left(\psi\big(t, x(t)\big) - (K - \gamma K x(t)\right) \leq 0 \\ &3\text{-}\quad \|\psi\big(t, x(t)\big)\| \leq \|K - \gamma K\|\|x(t)\| \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که $\psi\big(t, x(t)\big)$ به عنوان قسمت سوم (۱۰)، نیز برابر خواهد بود با رابطه (۱۱) :

$$\psi\big(t, x(t)\big) = \mathrm{sat}\big(Kx(t)\big) - \gamma K x(t) \tag{۱۱}$$

لم ۳: نامساوی (۱۲) می‌تواند از تابع اشباع نتیجه شود که اثبات آن در مرجع [۳۰و۲۹] بررسی شده است.

[1] Lipschitz function
[2] Sector Nonlinearity

$$\|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| \le \|K(x_1 - x_2)\| \tag{۱۲}$$

متمّم [1] ۱: اگر ماتریس $A \in R^{n\times n}$ و $\alpha < 2$ و β یک مقدار حقیقی باشد و $\frac{\alpha\pi}{2} \le \eta \le \min\{\pi, \alpha\pi\}$ و $M > 0$ یک مقدار مثبت باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است. در این رابطه $\lambda_i(A)$ مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند[۳۱و۳۲].

$$\|E_{\alpha,\beta}(A)\| \le \frac{M}{1+\|A\|}\,, \qquad \eta \le |\arg(\lambda_i(A))| \le \pi, \quad , i = 1,2,\dots,n \tag{۱۳}$$

لم ٤: تصور کنید $\alpha > 0$ و $a(t)$ یک تابع غیر منفی و انتگرال پذیر روی $0 \le t < T$ و $g(t)$ یک تابع غیر منفی غیرکاهشی تعریف شده روی $0 \le t < T$ باشد، به طوریکه $g(t) \le M$ و $u(t)$ تابع غیر منفی و انتگرال پذیر محلی روی $0 \le t < T$ باشد آنگاه:

$$u(t) \le a(t) + g(t)\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)d\tau \tag{۱۴}$$

سپس نامساوی (۱۵) برقرار خواهد بود.

$$u(t) \le a(t) + \int_0^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(g(t)\Gamma(\alpha)\right)^k}{\Gamma(k\alpha)}(t-\tau)^{k\alpha-1}a(\tau)\right]d\tau\,, \quad 0 \le t < T \tag{۱۵}$$

بعلاوه اینکه اگر $a(t)$ تابع غیر کاهشی روی $[0 \quad T)$ باشد، آنگاه رابطه (۱۶) برقرار خواهد بود که البته اثبات آن در [۳۲] به طور مفصل ارائه شده است.

$$u(t) \le a(t)E_{\alpha,1}(g(t)\Gamma(\alpha)t^{\alpha}) \tag{۱۶}$$

لم ٥: اگر مقادیر $N_1, N_2 \ge 1$ مثبت باشند، آنگاه رابطه (۱۷) برای هر $0 < \alpha < 1$ برقرارخواهد بود. اثبات (۱۷) در [۳۳] نیز ارائه شده است.

$$\|E_{\alpha,1}(At^{\alpha})\| \le N_1\|e^{At}\|\,, \qquad \|E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha})\| \le N_2\|e^{At}\| \tag{۱۷}$$

قضیه۳: سیستم خطی مرتبه کسری ${}_0^C D_t^{\alpha} x = Ax$ با ابعاد $x \in R^n$ و $A \in R^{n\times n}$ را در نظر بگیرید. نقطه تعادل در مبدا را $x_e \in R^n$ می‌نامیم، آنگاه سیستم خطی مرتبه کسری پایدار لیاپانوف است اگر و فقط اگر رابطه (۱۸) برقرار باشد[۳۲].

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t, \|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t_0) - x_e\| < \epsilon, \forall\, t \ge t_0 \tag{۱۸}$$

۳- دینامیک مرتبه کسری وضعیت ماهواره

محاسبات مرتبه کسری نقش بسیار مهمی در زمینه‌های گوناگون علمی به خصوص مهندسی کنترل دارند، می‌توانند رفتار سیستم‌های پیچیده دینامیکی را مناسب تر از مرتبه صحیح توصیف و مدل سازی کنند و در حال حاضر به عنوان یک ابزار کارآمد

[1] Corollary

در مهندسی کنترل، الکترونیک، رباتیک و پردازش سیگنال شناخته می‌شوند که این توسعه در مراجع [۳۴و۳۵] به عنوان یکی از پیشروترین تحقیقات در این خصوص ارائه شده‌اند. بر همین اساس، در چارچوب اینرسی[1]، دینامیک مرتبه کسری وضعیت ماهواره به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود.

$$ {}_0^{C}D_t^{\alpha}M = T_a + T_b + T_c \tag{۱۹}$$

که در آن M ماتریس ممان اینرسی روی ماهواره، T_a, T_b و T_c گشتاور چرخ عکس العملی، گشتاور جاذبه و گشتاور اغتشاش می‌باشند. مجموع اینرسی نیز به صورت $M = Iw$ محاسبه می‌شوند که در آن، I و w ماکزیمم اینرسی و سرعت زاویه‌ای می‌باشند. مشتق مجموع ممان اینرسی M نیز به صورت رابطه (۲۰) ارائه می‌شود.

$$ {}_0^{C}D_t^{\alpha}M = I\,{}_0^{c}D_t^{\alpha}w + w \times Iw \tag{۲۰}$$

$\times$ در رابطه (۲۰) بیانگرضرب متقاطع[2] می‌باشد، در این صورت از ترکیب روابط (۱۸)–(۲۰)، رابطه (۲۱) را خواهیم داشت که،

$$ I\,{}_0^{C}D_t^{\alpha}w + w \times Iw = T_a + T_b + T_c \tag{۲۱}$$

با انتخاب $I = \mathrm{diag}(I_x, I_y, I_z)$ می‌توانیم گشتاورهای چرخ عکس العملی، گشتاور جاذبه و اغتشاش را به صورت بردارهای رابطه (۲۲) تشریح کنیم.

$$ T_a = \begin{bmatrix} T_{ax} \\ T_{ay} \\ T_{az} \end{bmatrix} \qquad T_b = \begin{bmatrix} T_{bx} \\ T_{by} \\ T_{bz} \end{bmatrix} \qquad T_c = \begin{bmatrix} T_{cx} \\ T_{cy} \\ T_{cz} \end{bmatrix} \tag{۲۲}$$

که در این حالت، روابط تنظیم وضعیت ماهواره به صورت رابطه (۲۳) بیان می‌شود.

$$ \begin{aligned} I_x\,{}_0^{C}D_t^{\alpha}w_x &= w_y w_z (I_y - I_z) + h_x + u_x \\ I_y\,{}_0^{C}D_t^{\alpha}w_y &= w_x w_z (I_z - I_x) + h_y + u_y \\ I_z\,{}_0^{C}D_t^{\alpha}w_z &= w_x w_y (I_x - I_y) + h_z + u_z \end{aligned} \tag{۲۳}$$

که البته پارامترهای h_x, h_y, h_z در رابطه (۲۴) مشخص شده‌اند.

$$ h_x = [(T_{ax} + T_{bx} + T_{cx})];\ h_y = [(T_{ay} + T_{by} + T_{cy})]\ ;\ h_z = [(T_{az} + T_{bz} + T_{cz})] \tag{۲۴}$$

پارامترهای h_x، h_y و h_z گشتاور اغتشاشی می‌باشند وu_x و u_y و u_z گشتاورهای کنترلی در راستاهای x, y, z می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم که، $h_x > h_y > h_z = 1$ گشتاورهای اختلالی هستند که می‌توانند به صورت رابطه (۲۵) تعریف شوند.

[1] Inertia Framework
[2] Cross Product

$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ - & 0/35 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & -0/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

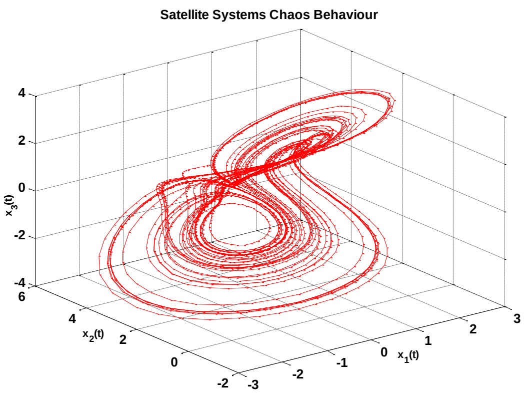
در این صورت سیستم سه بعدی تنظیم وضعیت ماهواره با رفتار آشوبناک به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} {}_0^cD_t^\alpha x(t) &= \sigma_x yz - \frac{1.2}{I_x}x + \frac{\sqrt{6}}{2I_x}z \\ {}_0^cD_t^\alpha y(t) &= \sigma_y xz + \frac{0.35}{I_y}y \\ {}_0^cD_t^\alpha z(t) &= \sigma_z xy - \frac{\sqrt{6}}{I_z}x - \frac{0.4}{I_z}z \end{aligned} \tag{۲۶}$$

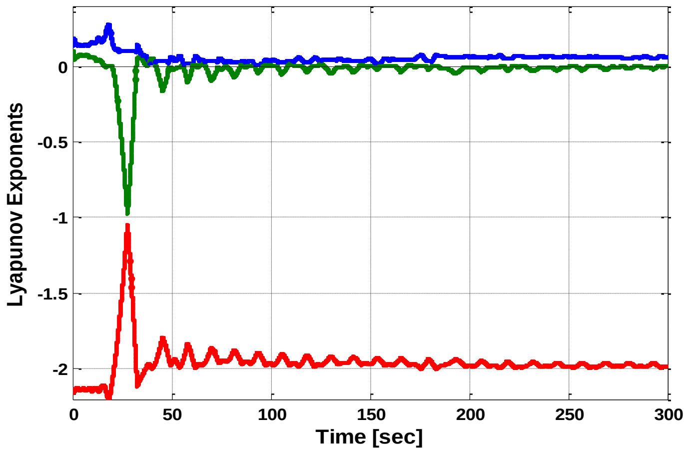
پارامترهای مهم در رابطه (۲۶)، برابر $\sigma_z = \frac{I_x - I_y}{I_z}$ و $\sigma_y = \frac{I_z - I_x}{I_y}$ و $\sigma_x = \frac{I_y - I_x}{I_x}$ هستند. در بخش بعدی، سعی می‌شود توصیف سیستم و دینامیک ماهواره به صورت خلاصه بیان شوند.

۳-۱- کلاس خاصی از ماهواره‌های آشوبناک مرتبه کسری

تاکنون دینامیک‌های متعددی از ماهواره‌ها بررسی و ارائه شده‌اند. در شرایط خاصی که در مراجع [۳۶-۴۰] ارائه شده است، ماهواره‌ها می‌توانند عملکردی نوسانی داشته باشند. این نوع عملکرد توسط سیستم‌های آشوبناک مدل می‌شوند که در نتیجه تاحدی، غیر قابل پیش بینی می‌باشند و دقیقاً نکته اصلی همین رفتار می‌باشد. درسال‌های گذشته مقالات متعددی به بررسی و کنترل آشوب در دینامیک وضعیت ماهواره‌ها پرداخته‌اند. برای مثال در مرجع [۴۱] درباره‌ی کنترل وضعیت در ماهواره‌ای که معادلات دینامیکی آن مشابه معادلات سیستم لورنز باشد، بحث شده است. یکی از بهترین معیارها برای بررسی و اثبات آشوبناکی سیستم‌ها، استفاده از مسیرهای حرکت حالت‌ها و نماهای لیاپانوف آنها همانند شکل‌های (۲و۳) می‌باشند.



شکل۲ – شمای فضای حالت در ماهواره مورد نظر



شکل۳ - نمای لیاپانوف و پرتره فاز یا مسیر حالت‌ها در ماهواره مورد نظر

پیرو روابط (۲۶)-(۱۸)، معادله مرتبه کسری سیستم کنترل وضعیت ماهواره به صورت رابطه (۲۷) بدست می‌آید.

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = f(x(t)) + Bu(t) \tag{۲۷} $$

پس از محاسبه ماتریس ژاکوبین و بررسی صحت پاسخ‌ها، معادله دینامیکی برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره به صورت رابطه (۲۸) در مرجع [۴۴] ارائه شده است. لازم به ذکر است که تمام جزئیات از قبیل روش بدست آوردن و راهکارهای ارائه شده در مسیر استحصال رابطه (۲۸) در همان مرجع ذکر شده است.

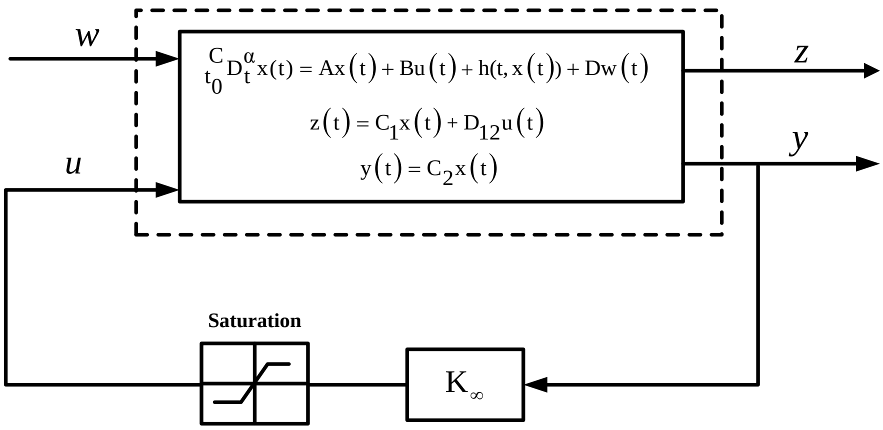
$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + h\big(t, x(t)\big) \tag{۲۸} $$

۳-۲- پایدار سازی وضعیت ماهواره با رفتار آشوبناک

کنترل مقاوم یکی از استراتژی‌ها درطراحی سیستم‌های کنترل است، که در اینجا بر روی پایداری و قوام عملکرد سیستم کنترل وضعیت ماهواره درمقابل اغتشاشات خارجی، تاکید می‌شود. هدف از طراحی چنین کنترل‌کننده ای، ایجاد یک سیستم کنترلی حلقه بسته به نحوی است که تغییرات در شرایط سیستم کنترل وضعیت ماهواره در اثر ورودی‌های مزاحم مخصوصاً اغتشاش خارجی، کمتریـن اثـر را در خروجـی داشته باشد. در واقع برای ماهـواره مورد نظـر با داشتن اطلاعـات لازم، کنتـرل بازخورد خروجـی $u(t) = K_\infty y(t)$ تحت اشباع، باید طوری تعیین شود که وضعیت ماهواره را وادار به تنظیم در مرجع از پیش تعیین شده کند و اثر اغتشاشات گشتاور خارجی را در خروجی، از یک مقدار تعریف شده ϑ کوچکتر کند. انگیزه اصلی در این مقاله در واقع طراحی کنترل‌کننده بازخورد خروجی $u = K_\infty y(t)$ مقاوم در مقابل اغتشاش می‌باشد، به همین منظور معادلات سیستم یا حالت‌های زوایای اویلر، خروجی اندازه گیری (زوایای اویلر) و خروجی کنترل به منظور جایگیری وضعیت ماهواره طبق زوایای مطلوب، به صورت رابطه (۲۹) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + h\big(t,x(t)\big) + Dw(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}(t)u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

بر همین اساس کنترل‌کننده بازخورد خروجی $u = K_\infty y(t)$ برابر با $u = K_\infty C_2x(t)$ در نظر گرفته شده است. البته با توجه به ساختار سیستم‌های عملیاتی، اغتشاش $w(t)$ در خروجی کنترل یعنی بردار $z(t)$ و خروجی اندازه گیری یعنی بردار $y(t)$ و البته همینطور سیگنال کنترل $u(t)$ در خروجی اندازه گیری یعنی بردار $y(t)$، حضور ندارند. لذا در ادامه ابتدا تحلیل پایداری برای این سیستم کنترل پیشنهادی ارائه می‌شود و سپس طراحی کنترل‌کننده ارائه خواهد شد. ساختار حلقه بسته مورد نظر در شکل (۴) ارائه شده است.



شکل ٤- ساختار حلقه بسته سیستم کنترل مقاوم وضعیت ماهواره

٤- تحلیل پایداری

بررسی پایداری سیستم از مهم ترین بخش‌های هر سیستم کنترل می‌باشد، به طوریکه سیستم حلقه بسته در حضور اغتشاش و اشباع عملگر توسط کنترل‌کننده K_∞، باید پایدار شود. به همین خاطر در دو قضیه ۴و۵ همگرایی پاسخ سیستم در قبال کنترل‌کننده را بررسی می‌نماییم.

قضیه ٤: سیستم (۲۹) به همراه بازخورد خروجی تحت اشباع $u = K_\infty y(t)$ پایدار مجانبی است اگر وجود داشته باشد بهره کنترلی K_∞ و ماتریس $\gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ و $0 < \gamma_i \le 1$ به ازای $i = 1, \dots, m$ به طوریکه ماتریس $A + BC_2\gamma K_\infty$ شرایط پایداری را برقرار سازد یعنی اگر $|\arg(\mathrm{spec}(A + BC_2\gamma K_\infty))| > \frac{\alpha\pi}{2}$ و $\alpha\rho(A + BC_2\gamma K_\infty) > l$ باشند. $\mathrm{spec}(.)$ نشانگر اسپکتروم ماتریس یا مجموعه مقادیر ویژه می‌باشد.

اثبات: سیستم (۲۹) و بازخورد خروجی $u = K_\infty y(t)$ را به صورت رابطه (۳۰) در نظر بگیرید:

$${}_{0}^{c}D_t^{\alpha}x(t) = A_cx(t) + h(t,x(t)) + B\phi(t,x(t)) \qquad (۳۰)$$

که در آن $A_c = A + B\gamma C_2 K_\infty$ و $\phi(x,t) = sat(K_\infty C_2 x) - \gamma K_\infty C_2 x$. بامحاسبه تبدیل لاپلاس از هر دو طرف رابطه (۳۰)، رابطه (۳۱) بدست می‌آید.

$$X(s) = (Is^\alpha - A_c)^{-1}[s^{\alpha-1}x(0) + L[h(t,x(t)) + B\phi(t,x(t))] \tag{۳۱}$$

که در (۳۱) رابطه $I_{n\times n}$ ماتریس همانی می‌باشد. با محاسبه عکس تبدیل لاپلاس از معادله قبلی و در نظر گرفتن تابع میتاژ $E_{\alpha,\alpha}$ دو پارامتره در [۲۸] و با استفاده از انتگرال کانولوشن، خواهیم داشت که:

$$x(t) = E_\alpha(A_c t^\alpha)x(0) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, E_{\alpha,\alpha}(A_c(t-\tau)^\alpha)[h(t,x(t)) + B\phi(t,x(t))]d\tau \tag{۳۲}$$

بنابراین با محاسبه نرم دوم رابطه (۳۲)، رابطه (۳۳) را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \le &\left\|E_{\alpha,1}(A_c t^\alpha)x(0)\right\| \\ &+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\|E_{\alpha,\alpha}(A_c(t-\tau)^\alpha)\right\|\left[\|h(t,x(t))\| + \|B\phi(t,x(t))\|\right]d\tau\end{aligned} \tag{۳۳}$$

با استفاده از لم۲، رابطه (۳۴) بدست خواهد آمد.

$$\|x(t)\| \le \left\|E_{\alpha,1}(A_c t^\alpha)x(0)\right\| + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\|E_{\alpha,\alpha}(A_c(t-\tau)^\alpha)\right\|\left[\left\|\frac{x(\tau)}{C}\right\| + \lambda\|Bx(\tau)\|\right]d\tau \tag{۳۴}$$

که $\lambda = \|K_\infty - \gamma K_\infty\| > 0$ می‌باشد. با استفاده از متمّم ۱، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\le \frac{M}{1+\|A_c\|t^\alpha}\|x(0)\| + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}.\frac{M}{1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha} \times [\frac{1}{C} + \lambda\|B\|\|x(\tau)d\tau \\ &= \frac{M}{1+\|A_c\|t^\alpha}\|x(0)\| + (\frac{M}{C} + M\lambda\|B\|\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha}\|x(\tau)\|d\tau\end{aligned} \tag{۳۵}$$

بااستفاده از لم ۴ و همینطور تعریف $l = \left(\frac{M}{C} + M\lambda\|B\|\right)$ که در آن M و C به ترتیب روابط۳۵ و ۳۶ را برقرار می‌کنند و البته با در نظر گرفتن $f(t) = \frac{M\|x(0)\|}{1+\|A_c\|t^\alpha}$, $u_l(t) = x(t)$ و همچنین $H(\tau) = \frac{l(t-\tau)^{\alpha-1}}{1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha}$ به رابطه (۳۶) خواهیم رسید.

$$\begin{aligned}&\|x(t)\| \\ &\le \frac{M}{1+\|A_c\|t^\alpha}\|x(0)\| \\ &+ \left(\frac{M^2}{C} + M^2\lambda\|B\|\right)\int_0^t \frac{\|x(0)\|}{1+\|A_c\|\tau^\alpha}.\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha}\left(\exp\int_\tau^t \frac{l(t-r)}{1+\|A_c\|(t-r)^\alpha}dr\right)d\tau\end{aligned} \tag{۳۶}$$

با استناد به نتایج گزارش در مرجع [۴۵] می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \le &\frac{M}{1+\|A_c\|t^\alpha}\|x(0)\| \\ &+ \left(\frac{M^2}{C} + M^2\lambda\|B\|\right)\int_0^t \frac{\|x(0)}{1+\|A_c\|\tau^\alpha}\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}}d\tau\end{aligned} \tag{۳۷}$$

همچنین انتگرال فوق را می‌توان در قالب رابطه (۳۸) بیان کرد.

$$\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\|x(0)}{1+\|A_c\|\tau^\alpha} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{\|x(0)}{1+\|A_c\|\tau^\alpha} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau \qquad (۳۸)$$

اگر $\tau \in [0,\frac{t}{2}]$ باشد، آنگاه $(t-\tau) < \tau$ در صورتی که مرتبه مشتق $1 > \alpha > 0$ خواهد بود که،

$$\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\|x(0)}{1+\|A_c\|\tau^\alpha} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau \le \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\|x(0)}{1+\|A_c\|\tau^\alpha} \frac{(\tau)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|(\tau)^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau \qquad (۳۹)$$

به طور مشابه اگر $\tau \in [\frac{t}{2},t]$باشد، آنگاه:

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{\|x(0)}{1+\|A_c\|\tau^\alpha} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau \le \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\|x(0)}{1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha} \frac{(\tau)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|((t-\tau))^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau \qquad (۴۰)$$

با استفاده ازتغییر متغیر $\tau_1 = t-\tau$، رابطه (۴۱) حاصل خواهد شد.

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{\|x(0)\|}{1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|(t-\tau)^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau = \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\|x(0)}{1+\|A_c\|(\tau_1)^\alpha} \frac{(\tau_1)^{\alpha-1}}{(1+\|A_c\|((\tau_1))^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau \qquad (۴۱)$$

بنابراین، از رابطه (۴۱)، رابطه (۴۲) استخراج می‌شود.

$$\|x(t)\| \le \frac{M}{1+\|A_c\|\tau^\alpha}\|x(0)\| + 2\left(\frac{M^2}{C}+M^2\lambda\|B\|\right)\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\|x(0)\|(\tau)^{\alpha-1}}{\left(1+\|A_c\|\left((\tau)\right)^\alpha\right)^{2-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} d\tau = \\ = \frac{2Ml\|x(0)\|}{\alpha\|A_c\|-l} + \frac{M\|x(0)\|}{1+\|A_c\|t^\alpha} + \frac{2\left(\frac{M^2}{C}+M^2\lambda\|B\|\right)\|x(0)\|}{(l-\alpha\|A_c\|)\left(1+\|A_c\|\left(\frac{t}{2}\right)^\alpha\right)^{1-\frac{1}{\alpha\|A_c\|}}} \qquad (۴۲)$$

که از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت سیستم حلقه بسته (۳۰) پایدار مجانبی است و قضیه ۴ برقرارمی‌باشد.

قضیه ۵: سیستم حلقه بسته (۳۰) پایدار مجانبی است اگر وجود داشته باشد بهره کنترل‌کننده K_∞ و $\gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_m)$ و $1 \ge \gamma_i > 0$ به ازای $i = 1,\dots,m$ به طوریکه قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس $A+BC\gamma K_\infty$ شرایط پایداری را برقرار سازد، یعنی $\mathrm{Re}\left(\mathrm{eig}(A+\gamma BC_2K_\infty)\right) < 0$ و $w - N_2G\Gamma(\alpha) < 0$ به طوریکه $P = \max\{\mathrm{Re}\{\mathrm{eig}(A+\gamma BC_2K_\infty)\}\}$ و $Q = \left[\left\|\frac{1}{C}\right\| + \|B\|\right]$ و N_2 رابطه (۴۸) را برقرار سازد.

اثبات: مشابه اثبات قضیه ۴، با استفاده از تبدیل لاپلاس، استفاده از عکس تبدیل لاپلاس، استفاده از اپراتور نرم دوم و نامساوی مثلثی، با تعریف پارامتر $Q = \left[\left\|\frac{1}{c}\right\| + \lambda\|B\|\right]$رابطه (۴۳) ارائه می‌شود.

$$\|x(t)\| \le \left\|E_{\alpha,1}(A_c t^\alpha)x(0)\right\| + Q\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\| E_{\alpha,\alpha}(A_c(t-\tau)^\alpha)\right\|\|x(\tau)d\tau \quad (۴۳)$$

با استفاده از لم ۵ خواهیم داشت:

$$\|x(t)\| \le N_1\|e^{A_c t}\| + Q\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}N_2\left\|e^{A_c(t-\tau)}\right\|\|x(\tau)\|d\tau \quad (۴۴)$$

با ضرب هر دو طرف معادله (۴۴) در $e^{-A_c t}$ به رابطه (۴۵) خواهیم رسید که:

$$\|x(t)\|\|e^{-A_c t}\| \le N_1 + Q\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}N_2\|e^{-A_c t}\|\|x(\tau)\|d\tau \quad (۴۵)$$

با استفاده از لم ۴ و در نظر گرفتن $u = \|x(t)\|\|e^{-A_c t}\|$ و $g(t) = GN_2$ و $a(t) = N_1$ به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$\|x(t)\|\|e^{-A_c t}\| \le N_1 E_{\alpha,1}(N_2 Q\Gamma(\alpha)t^\alpha) \quad (۴۶)$$

سپس با ضرب دو سوی رابطه (۴۶) در $\|e^{A_c t}\|$، معادله (۴۷) بدست خواهد آمد.

$$\|x(t)\| \le N_1 E_{\alpha,1}(N_2 Q\Gamma(\alpha)t^\alpha)\|e^{A_c t}\| \quad (۴۷)$$

با در نظر گرفتن لم ۵، رابطه (۴۸) برقرار خواهد شد:

$$\|x(t)\| \le N_1 E_{\alpha,1}(N_2 Q\Gamma(\alpha)t^\alpha)\|e^{A_c t}\| \le N_1\|e^{A_c t}\|N_1'\left\|e^{(N_2 G\Gamma(\alpha)+A_c)t}\right] \quad (۴۸)$$

که در آن $N_1' > 1$ می‌باشد. اگر $0 > \big(P - N_2 Q\Gamma(\alpha)\big)$ باشد، آنگاه هنگامی که $t \to \infty$ ، $N_1 N_1'\left\|e^{(N_2 G\Gamma(\alpha)+A_c)t}\right]$ به سمت صفر میل خواهد کرد، که این قسمت بیانگر پایداری مجانبی سیگنال $x(t)$ می‌باشد.

٤-١- طراحی کنترل‌کننده بازخورد خروجی مقاوم

در این قسمت، روش طراحی کنترل‌کننده ارائه می‌شود. در واقع هدف اصلی در طراحی کنترل‌کننده، $u = K_\infty y(t)$ این است که سیستم حلقه بسته با کنترل بازخورد خروجی تحت اشباع پایدار باشد. علاوه بر آن کنترل‌کننده به گونه‌ای عمل کند که کمترین اثر اغتشاش در خروجی ظاهر شود. طراحی کنترل‌کننده بازخورد خروجی در قضیه ۶ ارائه می‌شود.

قضیه ٦: سیستم مرتبه کسری کنترل وضعیت ماهواره (۲۹) به همراه بازخورد خروجی $u = K_\infty C_2 x(t)$ را در نظر بگیرید. اگر وجود داشته باشد یک بهره کنترل‌کننده K_∞ و $X = P^{-1}$ ،$Y_1 = K_1 P^{-1}, Y_2 = K_2 P^{-1}$ ،$Y_1^T = P^{-1}K_1^T, Y_2^T = P^{-1}K_2^T$ و $K_\infty = K_1 + K_2$ به طوریکه رابطه نامساوی (۴۹) برقرار باشد، آنگاه سیستم حلقه بسته (۲۹) با در نظر داشتن کنترل‌کننده بازخورد خروجی $u = K_\infty C_2 x(t)$، پایدار مجانبی خواهد بود.

$$\min(\vartheta^2)$$
$$s.t: P>0 \qquad \Psi_2\le 0 \qquad \eta>0 \qquad \sigma>0,$$

جایی که

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} A^TP+K_1^TB^TP+K_2^TB^TP+PA+PBK_1+PBK_2+\eta I+\sigma^2 & PD & C_1^T+K_1^TD_{12}^T+K_2^TD_{12}^T \\ D^TP & -\vartheta^2 I & 0 \\ C_1+D_{12}K_1+D_{12}K_2 & 0 & -I \end{bmatrix} \quad (۴۹)$$

$$X=P^{-1}$$
$$Y_1=K_1P^{-1}, Y_2=K_2P^{-1}$$
$$Y_1^T=P^{-1}K_1^T, Y_2^T=P^{-1}K_2^T$$
$$K_\infty=K_1+K_2$$

اثبات: سیستم و دینامیک آن در معادله حالت، به همراه خروجی اندازه گیری و خروجی کنترل در رابطه (۵۰) ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) &= Ax(t)+Bu(t)+h\big(t,x(t)\big)+Dw(t) \\ z(t) &= C_1x(t)+D_{11}w(t)+D_{12}(t)u(t) \\ y(t) &= C_2x(t)+D_{21}w(t)+D_{22}u(t) \end{aligned} \quad (۵۰)$$

برای غلبه بر پدیده اشباع $u=sat(K_\infty C_2x(t))$ سیستم حلقه بسته به صورت رابطه (۵۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) &= A_{cl}x(t)+Bu(t)+h\big(t,x(t)\big)+wD(t) \\ A_{cl}x(t) &= (A+\gamma BK_\infty C_2)x(t)+\varphi(t,x) \end{aligned} \quad (۵۱)$$

که در آن

$$\|\varphi(t,x)\|\le\sigma\|x\|, \qquad \sigma>0$$

معادله حالت سیستم به صورت رابطه (۵۲) خواهد بود.

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) &= A_{cl}x(t)+Bu(t)+h\big(t,x(t)\big)+wD(t), \\ &s.t \\ A_{cl} &= (A+\gamma BK_\infty C_2)+\varphi(t,x) \\ z(t) &= C_1x(t)+D_{12}(t)u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) \end{aligned} \quad (۵۲)$$

به منظور طراحی کنترل‌کننده و همینطور بررسی پایداری سیستم توسط آن، تابع لیاپانوف مربعی $V\big(t,x(t)\big)=x^TPx$ را در نظر می‌گیریم. بر همین اساس اگر مشتق تابع لیاپانوف را بررسی کنیم به رابطه (۵۳) خواهیم رسید. در این رابطه از چندین لم (لم‌های۱و۲و۳) استفاده می‌شود که از تشریح مراحل ساده سازی آنها خودداری می‌کنیم. پس از مشتق گیری و جایگذاری آنها، در بخش تابع لیاپانوف، به رابطه (۵۳) خواهیم رسید.

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha V(t) &\le 2x^T(t)P\,{}_0^C D_t^\alpha x(t)\\ &= \left[A_{cl}x(t) + B\varphi\big(t,x(t)\big) + h\big(t,x(t)\big)\right]^T Px(t)\\ &+ x^T(t)P\left[A_{cl}x(t) + h\big(t,x(t)\big) + B\varphi\big(t,x(t)\big)\right]\\ &= x^T A_{cl}^T Px + \varphi^T\big(t,x(t)\big)B^T Px + x^T PA_{cl}x + x^T PB\varphi\big(t,x(t)\big) + 2x^T Ph\big(t,x(t)\big)\\ &+ x^T PDw + w^T D^T Px\end{aligned} \tag{۵۳}$$

رابطه $2x^T Ph\big(t,x(t)\big)$ را می‌توان بر اساس فرض ۱در (۸)، به صورت (۵۴) گسترش داد:

$$2x^T Ph\big(t,x(t)\big) \le x^T(t)P^2x(t) + h^T\big(t,x(t)\big)h\big(t,x(t)\big) \le x^T(L^2 + \|P\|)x(t) \tag{۵۴}$$

لذا رابطه (۵۴) به صورت رابطه (۵۵) تبدیل خواهد شد.

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha V(t) \le\ & x^T A_{cl}^T Px + \varphi^T\big(t,x(t)\big)B^T Px + x^T PA_{cl}x + x^T PB\varphi\big(t,x(t)\big) + x^T(L^2 + \|P\|)x(t)\\ &+ x^T PDw + w^T D^T Px\end{aligned} \tag{۵۵}$$

جایی‌که

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha V(t) &= x^T\big(A_{cl}^T P + PA_{cl}\big)x + \varepsilon_1 x^T PBB^T Px + \varepsilon_1^{-1}\varphi^T\big(t,x(t)\big)\varphi\big(t,x(t)\big) + \varepsilon_2 x^T PBB^T Px\\ &+ \varepsilon_2^{-1}\varphi^T\big(t,x(t)\big)\varphi\big(t,x(t)\big) + x^T PDw + w^T D^T Px\\ &= x^T\big(A_{cl}^T P + PA_{cl}\big)x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)x^T PBB^T P + (\varepsilon_1^{-1}\\ &+ \varepsilon_2^{-1})\varphi^T\big(t,x(t)\big)\varphi\big(t,x(t)\big) + x^T(L^2 + \|P\|)x(t) + x^T PDw + w^T D^T Px\end{aligned}$$

با استفاده از ساده سازی نیز به رابطه (۵۶) خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha V(t) &= x^T\big(A_{cl}^T P + PA_{cl}\big)x + \varepsilon_1 x^T PBB^T Px + \varepsilon_1^{-1}\varphi^T\big(t,x(t)\big)\varphi\big(t,x(t)\big) + \varepsilon_2 x^T PBB^T Px\\ &+ \varepsilon_2^{-1}\varphi^T\big(t,x(t)\big)\varphi\big(t,x(t)\big) + x^T PDw + w^T D^T Px\\ &= x^T\big(A_{cl}^T P + PA_{cl}\big)x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)x^T PBB^T P + (\varepsilon_1^{-1}\\ &+ \varepsilon_2^{-1})\varphi^T\big(t,x(t)\big)\varphi\big(t,x(t)\big) + x^T(L^2 + \|P\|)x(t) + x^T PDw + w^T D^T Px\end{aligned} \tag{۵۶}$$

با استفاده از لم ۳ در (۱۲) خواهیم داشت: $\|\varphi\big(t,x(t)\big)\| \le \sigma\|x\|$، از این رو رابطه معادله لیاپانوف نیز به صورت رابطه (۵۷) تبدیل خواهد شد.

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha V(t) &= x^T\big(A_{cl}^T P + PA_{cl}\big)x + \varepsilon_1 x^T PBB^T Px + \varepsilon_1^{-1}\varphi^T\big(t,x(t)\big)\varphi\big(t,x(t)\big) + \varepsilon_2 x^T PBB^T Px\\ &+ \varepsilon_2^{-1}\varphi^T\big(t,x(t)\big)\varphi\big(t,x(t)\big) + x^T PDw + w^T D^T Px\\ &= x^T\big(A_{cl}^T P + PA_{cl}\big)x + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)x^T PBB^T P + x^T(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1})\sigma^2 x + x^T(\eta I)x(t)\\ &+ x^T PDw + w^T D^T Px + \sigma^2\|x\|\end{aligned} \tag{۵۷}$$

که بر همین اساس $\eta I = L^2 + \|P\|$ می‌باشد، از طرف دیگر تابع هزینه کنترل مقاوم، رابطه (۵۸) در نظر گرفته شده است:

$$J_{H_\infty} = \frac{\|z\|_{e_2}}{\|w\|_{e_2}} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty z^T z dt}{\int_0^\infty w^T w dt}} = \int_0^\infty z^T z dt \le \vartheta^2 \int_0^\infty w^2 w dt \tag{۵۸}$$

در واقع $0 > {}_0^C D_t^\alpha V(t) + J_{H_\infty}$ بهترین حالت ممکن برای رابطه تابع هزینه و مشتق تابع لیاپانوف خواهد بود که در این صورت علاوه بر تضمین پایداری، کمترین هزینه اجرایی سیستم بدست خواهد آمد. بر همین اساس بردار $\xi = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$ را تعریف می‌کنیم که در ادامه رابطه (۵۹) بدست خواهد آمد.

$$[x^T \quad w^T]\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} + (C_1 + D_{12}K_\infty)^T(C_1 + D_{12}K_\infty) + \eta I + \sigma^2 & PD \\ D^T P & -\vartheta^2 I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \le 0 \tag{۵۹}$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر در روابط (۶۰و۶۱و۶۲) رابطه (۶۳) مشخص خواهد شد.

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} + (C_1 + D_{12}K_\infty)^T(C_1 + D_{12}K_\infty) + \eta I + \sigma^2 & PD \\ D^T P & -\vartheta^2 I \end{bmatrix} \le 0 \tag{۶۰}$$

و با استفاده از لم شور[1] [۳۱] در نامساوی $\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2^T & -\sigma_3 \end{bmatrix} \le 0$ خواهیم داشت:

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} + \eta I + \sigma^2 & PD \\ D^T P & -\vartheta^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_1 + D_{12}K_\infty)^T \\ 0 \end{bmatrix} \; I \; [C_1 + D_{12}K_\infty \quad 0] \le 0 \tag{۶۱}$$

بطوریکه

$$\begin{gathered}
\sigma_1 = \begin{bmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} + +\eta I + \sigma^2 & PD \\ D^T P & -\vartheta^2 I \end{bmatrix} \\
\sigma_2 = \begin{bmatrix} (C_1 + D_{12}K_\infty)^T \\ 0 \end{bmatrix} \\
\sigma_3^{-1} = I \\
\sigma_2^T = [C_1 + D_{12}K_\infty \quad 0] \\
\sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2^T = \begin{bmatrix} (C_1 + D_{12}K_\infty)^T(C_1 + D_{12}K_\infty) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{۶۲}$$

که بر همین اساس رابطه (۶۲) به صورت رابطه (۶۳) تبدیل خواهد شد.

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} + \eta I + \sigma^2 & PD & (C_1 + D_{12}K_\infty)^T \\ D^T P & -\vartheta^2 I & 0 \\ C_1 + D_{12}K_\infty & 0 & -I \end{bmatrix} \le 0 \tag{۶۳}$$

با استفاده از لم تبدیل متجانس[2] در [۳۲] داریم :

$$\begin{cases} \Psi_2 \le 0 \\ P^{-1} > 0 \end{cases} \leftrightarrow \; P^{-T}\Psi_2 P^{-1} = P^{-1}\Psi_2 P^{-1} \le 0$$

و با در نظر گرفتن$u = K_\infty C_2 x = (K_1 + K_2)x$ رابطه (۶۳)، به صورت رابطه (۶۴) تغییر خواهد کرد.

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} A^T P + K_1^T B^T P + K_2^T B^T P + PA + PBK_1 + PBK_2 + \eta I + \sigma^2 & PD & C_1^T + K_1^T D_{12}^T + K_2^T D_{12}^T \\ D^T P & -\vartheta^2 I & 0 \\ C_1 + D_{12}K_1 + D_{12}K_2 & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{۶۴}$$

---
1 Schur Compliment
2 Congruence Transformation

با استفاده از تغییر متغیرهای $X = P^{-1}$ ، $Y_1 = K_1P^{-1}, Y_2 = K_2P^{-1}$، $Y_1^T = P^{-1}K_1^T, Y_2^T = P^{-1}K_2^T$، $K_\infty = K_1 + K_2$ و تغییر متغیر

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Psi_2 \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \leq 0 \ \Rightarrow \Psi_2 \leq 0$$

کنترل‌کننده پایدار ساز مقاوم در برابر اغتشاش بدست خواهد آمد. حال با استفاده از لم تبدیل متجانس، اگر نامساوی زیر بر قرار باشد، انگاه ماتریس $A + B\gamma K_\infty C_2$ شرایط پایداری را برقرار می‌کند. سپس با استفاده از قضیه‌های ۴و۵، مشخص می‌شود که سیستم حلقه بسته مرتبه کسری با بازخورد خروجی تحت اشباع $u(t) = K_\infty C_2 x(t)$، برای هر شرط اولیه x_0 به طوریکه $x_0 \in B_\delta \subset S(\gamma K_\infty, u_0)$ باشد، پایدار مجانبی است. باید به یاد داشت که، ناحیه پایدار B_ϵ درون $S(\gamma K_\infty, u_0)$ خواهد بود. بر همین اساس با استفاده از رابطه (۱۰) و (۱۸) رابطه (۶۵) بدست خواهد آمد.

$$\frac{1}{\epsilon} I - \frac{(\gamma K_\infty C)^T (\gamma K_\infty C)}{u_{0(l)}^2} \geq 0, \quad l = 1, \dots, m \tag{۶۵}$$

سپس با استفاده از لم شور، رابطه (۶۵) به شرط اینکه $\bar{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$ باشد، برابر با عبارت زیر خواهد شد[۵۲].

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon} I & (\gamma K_\infty C)^T \\ (\gamma K_\infty C) & u_{0(l)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{۶۶}$$

قضیه ۷: دررابطه (۶۵) و روابط (۶۱)-(۴۹) مساله پایداری مجانبی سیستم (۲۹) در قالب طراحی کنترل‌کننده بازخورد خروجی مقاوم، $u = K_\infty C_2 x(t)$ تحت اشباع و اغتشاش حل شده است. پس می‌توان ناحیه پایدار B_ϵ را با حل مساله بهینه سازی زیر بدست آورد. البته اثبات هر کدام از این روابط، در جای خود قبلا بررسی شده‌اند.

$$\begin{gathered} \min(\bar{\epsilon}) \\ s.t : P > 0 \qquad \Psi_2 \leq 0 \qquad \eta > 0 \qquad \sigma > 0, \\ s,t\text{: } P > 0 \text{ , (۶۶و۴۹)} \end{gathered} \tag{۶۷}$$

۴-۲- توسعه ناحیه جذب[1]

یکی دیگر از مهم ترین چالش ها در طراحی سیستم‌های کنترل، تخمین و توسعه ناحیه جذب می‌باشد چرا که محاسبه دقیق آن امری مشکل می‌باشد. به همین دلیل می‌توان یافتن بزرگترین ناحیه جذب ممکن را جایگزینی مناسب دانست. تخمین ناحیه جذب به همین خاطر موضوعی بوده است که توسط پژوهشگرانی همچون [۵۰-۴۶] بررسی شده است. عموما روش‌های تخمین ناحیه جذب به دو بخش بزرگ و کلی مبتنی بر لیاپانوف و غیر لیاپانوف دسته بندی می‌شوند. روش‌های مبتنی بر تئوری لیاپانوف (همچون این مقاله) براساس محاسبه تابع لیاپانوف می‌باشند که مجموعه‌های زیرسطح[2]این تابع لیاپانوف به عنوان زیر مجموعه‌های تغییر ناپذیر از ناحیه جذب محاسبه می‌شوند. رویه‌های مختلفی همچون تابع لیاپانوف کسری [۴۶و۴۷]، تابع لیاپانوف چند جمله‌ای [۴۸]، تابع لیاپانوف تکه‌ای معین [۴۹] و تابع لیاپانوف چند وجهی [۵۰] همگی از اشکال رایج در این قسمت می‌باشند. در واقع می‌توان گفت

[1]Region of Attraction enlargement
[2]Sub Space

که یافتن بزرگترین مجموعه زیرسطح از یک تابع لیاپانوف از طریق بزرگترین معیار شکل ممکن، اساس مساله تخمین ناحیه جذب است. اما این مساله، غیرمحدب[1]بوده و با اعمال ساده سازی‌هایی برروی آن می‌تواند به صورت یک مساله بهینه سازی دو خطی[2]نوشته شود که توسط روش‌هایی مبتنی بر تکرار می‌تواند منجر به یافتن مقدار بهینه آن شود. قضیه (۸) همین موضوع را برای مساله اصلی این پژوهش یعنی توسعه ناحیه جذب تشریح می‌کند.

در واقع این قضیه مهم ترین دستاورد این پژوهش می‌باشد. که خروجی آن طراحی کنترل‌کننده تعیین وضعیت بازخورد خروجی برای سیستم ماهواره تحت اشباع و اغتشاش می‌باشد.

قضیه ۸: سیستم تحت اشباع و اغتشاش ماهواره (۲۹) را در نظر بگیرید. اگر کنترل‌کننده بازخورد خروجی، $u = K_\infty C_2 x(t)$ وجود داشته باشد به طوریکه رابطه (۶۸) برقرار باشد، آنگاه سیستم پایدار مجانبی است به گونه‌ایی که ناحیه جذب آن گسترش یافته و ناحیه پایدار آن مشخص شده است.

$$\begin{gathered}\min(\mathrm{trace}(P))\\ \mathrm{s.t:}\ P>0 \quad \Psi_2 \le 0 \quad \eta>0, \sigma>0, \gamma>0, \vartheta>0\end{gathered} \tag{۶۸}$$

جایی‌که

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} A^TP + K_1^TB^T\boldsymbol{\gamma}^TP + K_2^TB^T\boldsymbol{\gamma}^TP + PA + P\boldsymbol{\gamma}BK_1 + P\boldsymbol{\gamma}BK_2 + \eta I + \sigma^2 & PD & C_1^T + K_1^TD_{12}^T + K_2^TD_{12}^T \\ D^TP & -\vartheta^2 I & 0 \\ C_1 + D_{12}K_1 + D_{12}K_2 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\in}\, I & (\boldsymbol{\gamma}K_\infty C)^T \\ (\boldsymbol{\gamma}K_\infty C) & u_{0(l)}^2 \end{bmatrix} \ge 0$$

$$\begin{gathered} X = P^{-1} \\ Y_1 = K_1P^{-1}, Y_2 = K_2P^{-1} \\ Y_1^T = P^{-1}K_1^T, Y_2^T = P^{-1}K_2^T \end{gathered}$$

$$K_\infty = K_1 + K_2$$

اثبات: این قضیه ازترکیب قضایای (۵) و (۶) و (۷) تشکیل شده است. اثبات هر کدام از آنها در جای خود انجام شده است. حل همزمان و یکجای آن به خاطر ماهیت غیرخطی BMI ، مشکل است. در این صورت، یکی از رویکردها استفاده ازروش‌های مبتنی بر تکرار می‌باشد. در واقع در رویکردهای تکراری عموماً با مشخص کردن و مشخص شدن بخشی از مجهولات و روند تکراری و اصلاح آنها، مشخصاً مجهول اصلی اینجا یعنی بهره کنترل‌کننده. K_∞ برای سیستم تحت اشباع و اغتشاش بدست می‌آید. رابطه (۶۹) روند بهینه سازی و مشخص شدن K_∞ برای سیستم (۲۹) را در قالب شبه کد (۱) مشخص کرده است.

[1]Non Convex
[2]Bilinear Problem

شبه کد (۱) : شبه کدی برای یافتن فیدبک خروجی مقاوم $\mathbf{K}_\infty$ برای سیستم تحت اشباع و اغتشاش در تعیین وضعیت ماهواره				
مقدار دهی اولیه در حل کننده ماتریسی خطی $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\vartheta}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$				(۶۹)

انتخاب K_1, K_2 به عنوان متغیرهای مجهول و مقدار دهی اولیه $, \vartheta > 0, \bar{\epsilon} > 0, \gamma = \gamma = 1$ $1, \vartheta > 0,$

بهینه سازی $\min(\mathrm{trace}(P))$

در هر تلاش یک مقدار P_k را ذخیره کنید و

$\min(\mathrm{trace}(P))$

تا برقراری شرط کوچک شدن خطا حلقه را ادامه دهید $\mathrm{err} < \theta(\theta \to 0)$

تا انتخاب کوچک ϑ، بهینه سازی را ادامه دهید

حل مساله بازخورد خروجی در قضیه ۶ توسط $\min(\vartheta^2)$

تا جائیکه ممکن است بهینه سازی را ادامه بدهید

مقادیر ϑ را ثابت نگه دارید و قضیه ۸ را به منظور یافتن γ حل کنید.

بررسی شرط $\mathrm{err} = \|\mathrm{tr}(P_k) - \mathrm{tr}(P_{k-1})\|$

ادامه حلقه تا جائیکه کمترین err بدست آید.

مشخص شدن مقادیر K_∞،$\gamma, \vartheta, \bar{\epsilon}$

۵- شبیه‌سازی

مثال ۱: سیستم مرتبه کسری $^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + h(t, x(t))$ را در نظر بگیرید [۵۱]. مرتبه مشتق $0 \le \alpha \le 1$ و $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, K_\infty = 3, C = [1 \quad 0]$ و $A_{cl} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$، $h(t, x(t)) = \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_2(t)) \end{bmatrix}$، $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. در حقیقت تابع h را می‌توانیم با استفاده از لم (۳)، ثابت لیپشیتز پیوسته با مقدار $L = 1$ در نظر گرفت. می‌توانیم تابع لیاپانوف $V(t) = x^T x$ با $P = I_{2\times 2}$ را در نظر بگیریم. مشتق معادله لیاپانوف محاسبه می‌شود

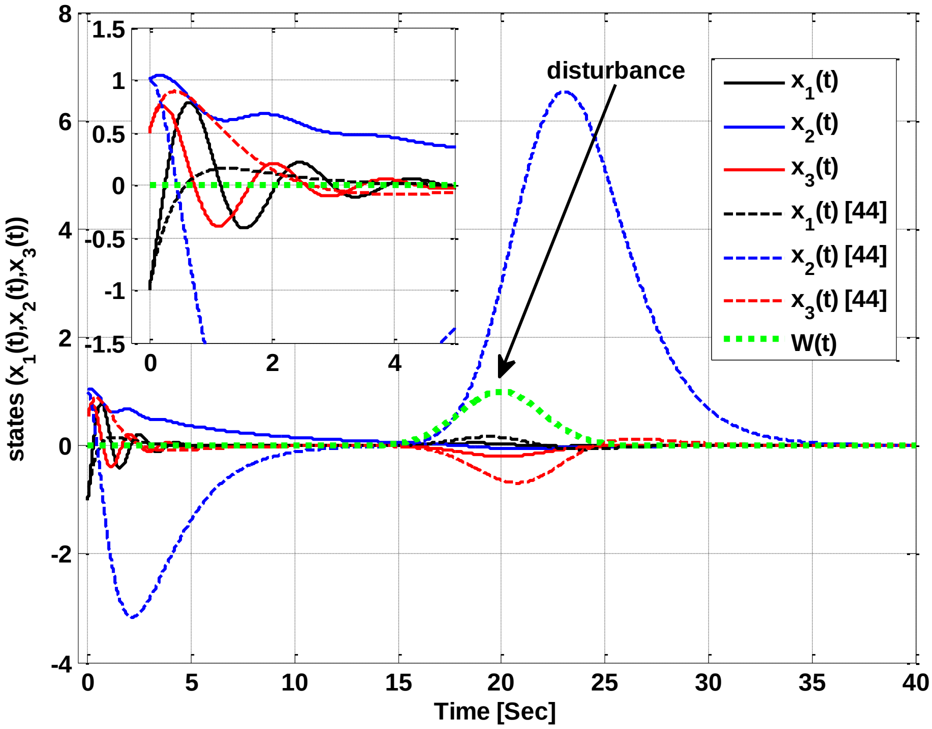
$$^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}V(t) \le 2x^T(t)\,^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}x(t) = \left[Ax + h\big(t, x(t)\big)\right]^T x + x^T\left[Ax + h\big(t, x(t)\big)\right] = -6x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 + 2x_1\sin(x_1) + 2x_2\sin(x_2) \le -4\left[x_1 - \frac{1}{2}x_2\right]^2 - x_2^2$$

بنابراین مشخص است که، $^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}V(t)$ منفی معین خواهد بود که در واقع حل مثال (۱) در قالب سیستم کلی (۲۸) پایدار مجانبی با توجه به قضیه ۶ خواهد بود. بنابراین $A^TP + PA + \eta I = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} < 0$، است که حل این مثال در قالب سیستم (۲۸) نیز پایدار مجانبی خواهد بود.

مثال ۲: سیستم‌های (۲۹و۲۸) که بیانگر مدل ارائه شده کنترل وضعیت ماهواره در مرجع [۴۴] باشد را در نظر بگیرید، در این صورت پارامترهای سیستم به صورت رابطه (۷۰) می‌باشند.

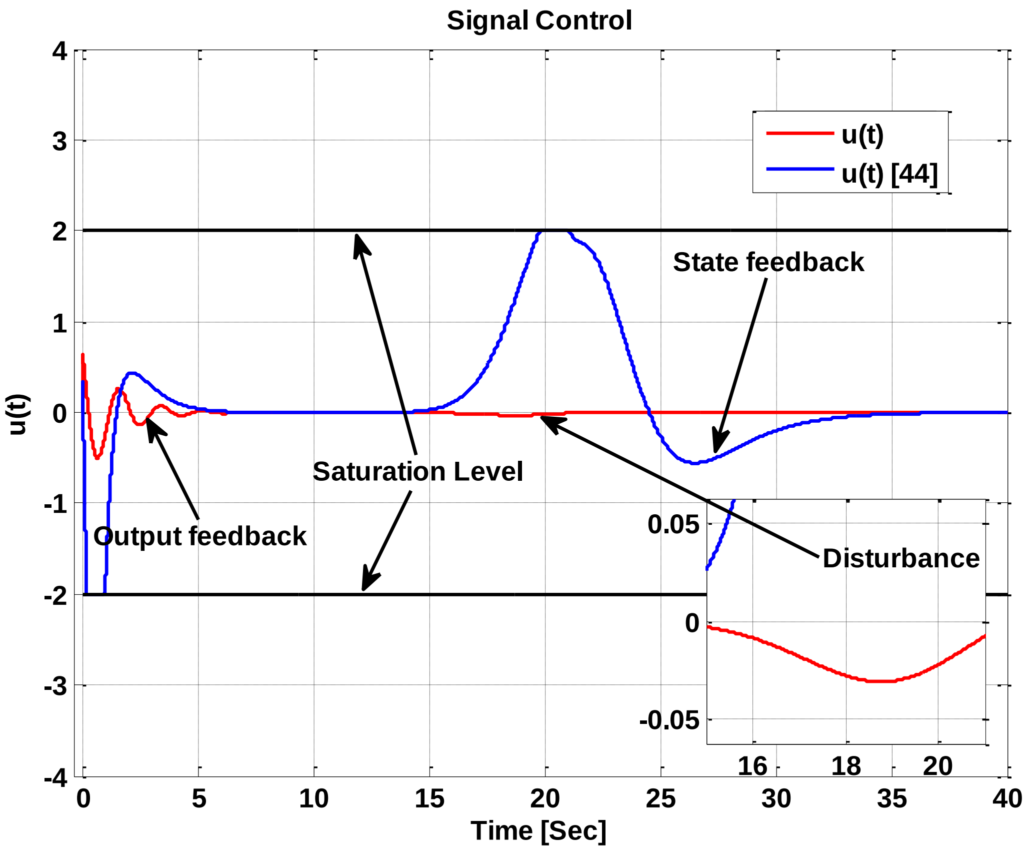
$$A=\begin{bmatrix}-0.7 & 0 & 0.4089\\ 0 & -0.175 & 0\\ -2.44 & 0 & -0.4\end{bmatrix}, h(t,x(t))=\begin{bmatrix}0.3x_2(t)x_3(t)\\ -x_1(t)x_3(t)\\ x_1(t)x_2(t)\end{bmatrix},$$
$$B=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, C_1=[1\quad 0\quad 0],$$
$$D_{12}=[1],\qquad C_2=[1\quad 0\quad 0] \tag{۷۰}$$

در مرجع [۴۴] از روش فیدبک حالت استفاده شده است. به طوریکه بر اساس اظهارات همین مرجع فیدبک حالت طراحی شده برای سیستم تحت اشباع به اندازه $u_{max}=2$ و اغتشاش گوسی با دامنه ۱ واحد به صورت $w(t)=1e^{\frac{(x-20)^2}{2\times 2^2}}$ که در ثانیه ۲۰ام به اوج خود رسیده است، به سیستم وارد شده است. با استفاده ازقضیه ۶ و جایگذاری مقادیر در رابطه (۶۸) ،کنترل‌کننده بهنیه به صورت $K_1=0/33, K_2=0/3046\,, K_\infty=0/6346$ تعیین می‌شوند. پاسخ حلقه بسته سیستم کنترل طراحی شده در مقایسه با مرجع اصلی [۴۴] که کنترل‌کننده آن فیدبک حالت $K=[2/4930\quad 0/0420\quad 4/1775]$ می‌باشد، در شکل (۵) ارائه شده است. البته با توجه به نتیجه بدست آمده در طراحی کنترل‌کننده بازخورد خروجی K_∞، مشخص است که مجموعه مقادیر ویژه حلقه بسته $A_c=A+BK_\infty C$ یعنی $\lambda_{1,2,3}=\{-0/1750+0/0000i,-0/7173+3/4432i,-0/7173-3/4432i\}$ منفی هستند، و این در واقع شرط اصلی قضیه ۲ یعنی $|\arg(spec(A_c))|>\frac{\alpha\pi}{2}$ و $\alpha\rho(A_c)>1$ و شرط اصلی قضیه ۴ یعنی $P-N_2Q\Gamma(\alpha)<0$ می‌باشد، که برآورده شده است. باتوجه به نتایج شکل (۵)، مشخص است که سیستم کنترل پیشنهادی، عملکرد مناسب تری نسبت راهکار ارائه شده در مرجع [۴۴] دارد. در واقع پاسخ‌های سیستم کنترل تحت اغتشاش و اشباع علاوه بر اینکه نوسان کمتری داشته است، سرعت همگرایی بهتری نیز داشته است.



شکل ۵- پاسخ سیستم کنترل طراحی شده در تعیین وضعیت ماهواره در مقایسه با [٤٤]

یکی دیگر از قسمت‌های مهم ارزیابی سیستم کنترل طراحی شده، استفاده از نمایش سیگنال کنترلی روش طراحی می‌باشد. در شکل(۶) سیگنال کنترلی روش پیشنهادی در مقایسه با روش کنترلی نشان داده شده در [۴۴] ارائه شده است. به خوبی در این شکل نیز مشخص است که عملکرد سیستم کنترلی باعث شده است که سیگنال کنترلی وارد ناحیه اشباع نشود و البته انرژی کمتری مصرف کند و درعین حال نوسان کمتری نیز داشته باشد که همه این فاکتورها در واقع بیان کننده عملکرد مناسب سیستم کنترل پیشنهادی می‌باشد.

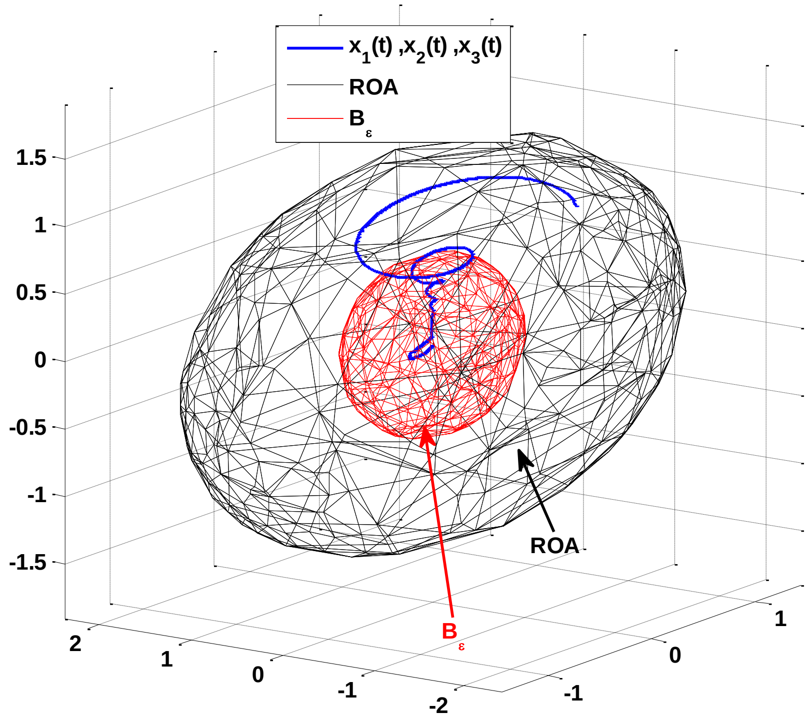


شکل٦ - سیگنال کنترلی سیستم کنترل طراحی شده و روش ارائه شده در[٤٤]

یکی دیگر از قضیه‌های این مقاله، قضیه۸ می‌باشد که بر اساس آن یکی از بزرگترین نواحی جذب ممکن بر اساس سیستم کنترل طراحی شده، بدست می‌آید. بر همین اساس ماتریس P به این صورت:

$$P = \begin{bmatrix} 1.1677 & -0.1677 & 0.0148 \\ -0.1677 & 5.7143 & -1.4290 \\ 0.0148 & -1.4290 & 2.6819 \end{bmatrix}$$

مشخص می‌شود. بزرگترین شعاع آن نیز در $\mathrm{trace}(P) = 9/5639$ مشخص می‌شود. مکمل همین قضیه، یافتن ناحیه جذب و شعاع همگرایی می‌باشد که در آن ناحیه جذب و شعاع همگرایی ناحیه پایدار در قضیه ۸ برابر $B_\in = 0/425$ است. شکل (۷) نیز بیانگر همین مقادیر می‌باشد که رفتار مسیرهای حالت سیستم کنترل (۷۰) را به سمت مبدا، در ناحیه پایدار مشخص کرده است.



شکل۷- ناحیه جذب و شعاع همگرایی ناحیه پایدار در قضیه (۸)

باتوجه به نتایج بدست آمده در شکل‌های (۵و۶و۷) مشخص است که عملکرد سیستم در همگرایی پاسخ‌ها نسبت به مرجع [۴۴] سرعت مناسبی داشته است. در عین حال هزینه کنترلی آن نیز کمتر و قابل قبول‌تر می‌باشد که این مهم در طراحی روش‌های کنترل بسیار حائز اهمیت می‌باشد. ناحیه جذب بدست آمده به همراه ناحیه پایدار نیز، نشان دهنده عملکرد مناسب سیستم کنترل پیشنهادی می‌باشد. مقادیر پارامترهای روش پیشنهادی نیز در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول (۱) - جزئیات در طراحی و شبیه سازی سیستم کنترل پیشنهادی

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
0/9	α	2/22	$\bar{\epsilon}$
0/78	γ	9/5639	trace(P)
-2	u_{min}	2	u_{max}

٦- نتیجه‌گیری

کنترل وضعیت ماهواره از مهم ترین چالش‌ها در طراحی ماهواره‌ها می‌باشد. دراین مقاله به بررسی روش طراحی پایداری و کنترل بازخورد خروجی ماهواره در قالب سیستم‌های دینامیکی مرتبه کسری تحت اشباع و اغتشاش پرداخته‌ایم. رفتار آشوبناک سیستم ماهواره‌ای مرتبه کسری با استفاده ازابزار های مختلف مانند نمای لیاپانوف و انشعاب تجزیه و تحلیل شده‌اند. یک کنترل‌کننده بازخورد خروجی ایستا برای کنترل این نوع سیستم‌ها با استفاده از چندین لم و قضیه و شرایط محدود، طراحی و پیاده سازی شده‌است.

نتایج شبیه سازی‌ها بااستفاده از فضاهای متعدد روی کلاس خاصی از ماهواره در حالت آشوبناک در مساله کنترل وضعیت پیاده و اجرا شدند و همگرایی در عین اثبات و تضمین پایداری برقرار شد. در مقایسه با مرجع [۴۴] با تکیه بر مفاهیم [۵۲]، مشخص شد روش پیشنهادی سرعت همگرایی مناسب داشته و در عین حال سیگنال کنترلی عملکرد کم هزینه‌تری دارد. علاوه بر این، نتایج به وضوح نشان داده‌اند که صحت نتایج و ارزیابی روش کنترل پیشنهادی در کنترل وضعیت ماهواره با توجه به پاسخ‌ها، قابل دفاع و ارزشمند می‌باشد. از مهم ترین چالش‌های پیش روی این مقاله، مساله ورود به حوزه زمان گسسته با انگیزه اجرا و پیاده سازی زمان حقیقی در بستر نرم افزار و سخت افزار در حلقه می‌باشد که سیستم‌های مرتبه کسری زمان گسسته مخصوصا در اثبات پایداری نکات مهمی دارند. علاوه بر این موضوع مساله تاخیر در ورودی تحت اشباع نیز یکی دیگر از پیشنهاداتی می‌باشد که می‌تواند در ادامه این کار مورد توجه محققین قرار گیرد.

مراجع:

[1] Song Z, Li H, Sun K. Finite-time control for nonlinear spacecraft attitude based on terminal sliding mode technique. ISA transactions. 2014 Jan 1;53(1):117-24.

[2] Zhao L, Jia Y. Finite-time attitude tracking control for a rigid spacecraft using time-varying terminal sliding mode techniques. International Journal of Control. 2015 Jun 3;88(6):1150-62.

[3] Tiwari PM, Janardhanan SU, un Nabi M. Rigid spacecraft attitude control using adaptive integral second order sliding mode. Aerospace Science and Technology. 2015 Apr 1;42:50-7.

[4] Zare K, Koofigar HR. Adaptive Second Order Sliding Mode Controller for Two-input Two output Uncertain Nonlinear Systems and Application to a 2-DOF Helicopter Model. Modares Mechanical Engineering. 2016 Feb 10;15(12):189-99.

[5] Pukdeboon C, Zinober AS, Thein MW. Quasi-continuous higher order sliding-mode controllers for spacecraft-attitude-tracking maneuvers. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2009 Sep 1;57(4):1436-44.

[6] Pukdeboon C, Zinober AS. Control Lyapunov function optimal sliding mode controllers for attitude tracking of spacecraft. Journal of the Franklin Institute. 2012 Mar 1;349(2):456-75.

[7] Cong B, Liu X, Chen Z. Backstepping based adaptive sliding mode control for spacecraft attitude maneuvers. Aerospace Science and Technology. 2013 Oct 1;30(1):1-7.

[۸] تاجی هروی فرید, "بررسی روش‌های کنترل وضعیت ماهواره." نشریه علوم و فناوری فضایی، پاییز ۱۳۹۵، دوره ۹، شماره ۲، صفحه ۳۲–۴۶.

[9] Zou AM, Kumar KD, Hou ZG, Liu X. Finite-time attitude tracking control for spacecraft using terminal sliding mode and Chebyshev neural network. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics). 2011 Jan 24;41(4):950-63.

[10] Spall JC. Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation. IEEE transactions on automatic control. 1992 Mar;37(3):332-41.

[11] Hou ZS. The parameter identification, adaptive control and model free learning adaptive control for nonlinear systems. Shenyang: North-eastern University. 1994.

[12] Zhong-Sheng H. Nonparametric Models and Its Adaptive Control Theory.

[13] Hou Z, Jin S. A novel data-driven control approach for a class of discrete-time nonlinear systems. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2010 Dec 23;19(6):1549-58.

[14] Al-Tamimi AA. Discrete-time control algorithms and adaptive intelligent systems designs. The University of Texas at Arlington; 2007.

[۱۵]فتحی، محمد, بلندی. مروری بر ماهواره های انعطاف پذیر: تحلیل دینامیک، بررسی چالش ها و رویکردهای کنترل وضعیت. دانش و فناوری هوافضا. ۲۰۲۴ Feb 20;12(2).

[۱۶]حمیدی بهشتی محمدتقی, اهوزی علی. طراحی کنترل کننده H∞ غیر خطی برای کنترل وضعیت ماهواره، نشریه فنی و مهندسی مدرس، تابستان ۱۳۸۳، شماره ۱۶، صفحه ۱تا۲۱.

[17] Wen JY, Kreutz-Delgado K. The attitude control problem. IEEE Transactions on Automatic control. 1991 Oct;36(10):1148-62.

[18] Song J, Zhang Z, Iwasaki A, Wang J, Sun J, Sun Y. An Augmented $ H_\infty $ Filter for Satellite Jitter Estimation Based on ASTER/SWIR and Blurred Star Images. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2021 Mar 29;57(5):2637-46.

[19] Wang P, Shtessel YB. Satellite attitude control using only magnetorquers. InProceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 98CH36207) 1998 Jun 26 (Vol. 1, pp. 222-226). IEEE.

[20] Joshi SM, Kelkar AG, Wen JY. Robust attitude stabilization of spacecraft using nonlinear quaternion feedback. IEEE Transactions on Automatic control. 1995 Oct;40(10):1800-3.

[21] Bang H, Tahk MJ, Choi HD. Large angle attitude control of spacecraft with actuator saturation. Control engineering practice. 2003 Sep 1;11(9):989-97.

[22] Grewal A, Modi VJ. Dynamics and control of flexible multibody systems: an application to orbiting platforms. In1995 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Intelligent Systems for the 21st Century 1995 Oct 22 (Vol. 3, pp. 2093-2098). IEEE.

[23] Di Gennaro S. Output attitude control of flexible spacecraft from quaternion measures: A passivity approach. InProceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 98CH36171) 1998 Dec 18 (Vol. 4, pp. 4549-4550). IEEE.

[24]Shrivastava SK. Robust low order dynamic controller for flexible spacecraft. InIEE PROCEEDINGS-D 1991 Sep (Vol. 138, No. 5).

[24]Qi Y, Jing H, Wu X. Variable Structure PID Controller for Satellite Attitude Control Considering Actuator Failure. Applied Sciences. 2022 May 23;12(10):5273.

[25]Zinjanabi AM, Pishkenari HN, Salarieh H, Abdollahi T. Attitude control of an underactuated satellite in presence of disturbance torque with optimal motion planning. Aerospace Science and Technology. 2022 Feb 1;121:107326.

[۲۶]ملک زاده, صبوحی, مبین, رضایتی. طراحی کنترل‌گر مقاوم غیرخطی و پیاده‌سازی آن بر روی شبیه‌ساز زیرسیستم کنترل وضعیت ماهواره. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۲۰۱۸ Jul 23;48(2):329-38.

[27]John FL, Dogra D. Application research of network learning algorithm based on neural network disturbance compensation in satellite attitude control. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 2022 May 26:1-8.

[28]Bello A, Olfe KS, Rodríguez J, Ezquerro JM, Lapuerta V. Experimental verification and comparison of fuzzy and PID controllers for attitude control of nanosatellites. Advances in Space Research. 2023 May 1;71(9):3613-30.

[29]Livadiotti S, Crisp NH, Roberts PC, Oiko VT, Christensen S, Maria Domínguez R, Herdrich GH. Uncertainties and design of active aerodynamic attitude control in very low earth orbit. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2022 May;45(5):859-74.

[30]Gutierrez RE, Rosário JM, Tenreiro Machado J. Fractional order calculus: basic concepts and engineering applications. Mathematical problems in engineering. 2010 Mar;2010.

[31]Monje CA, Chen Y, Vinagre BM, Xue D, Feliu-Batlle V. Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications. Springer Science & Business Media; 2010 Sep 28.

[32]Alaviyan Shahri ES, Alfi A, Tenreiro Machado JA. Stability analysis of a class of nonlinear fractional‐ order systems under control input saturation. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2018 May 10;28(7):2887-905.

[33] Shahri ES, Alfi A, Machado JT. Lyapunov method for the stability analysis of uncertain fractional-order systems under input saturation. Applied Mathematical Modelling. 2020 May 1;81:663-72.

[34]De la Sen M. About robust stability of Caputo linear fractional dynamic systems with time delays through fixed point theory. Fixed Point Theory and Applications. 2011 Dec;2011:1-9.

[35]Xing-wang G, Ai-jun L, Yang-yang G, Chang-qing W. Fractional order attitude stability control for sub-satellite of tethered satellite system during deployment. Applied Mathematical Modelling. 2018 Oct 1;62:272-86.

[36]Shahvali M, Naghibi-Sistani MB, Modares H. Distributed consensus control for a network of incommensurate fractional-order systems. IEEE Control Systems Letters. 2019 Mar 5;3(2):481-6.

[37]Eshaghi S, Ordokhani Y. Dynamical Behaviors of the Caputo–Prabhakar Fractional Chaotic Satellite System. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science. 2022 Oct;46(5):1445-59.

[38]Sayed AM, Matouk AE, Kumar S, Ali V, Bachioua L. Chaotic dynamics and chaos control in a fractional-order satellite model and its time-delay counterpart. Discrete Dynamics in Nature and Society. 2021 Jul 21;2021:1-1.

[38]Salazar FJ, Prado AF. Suppression of chaotic motion of tethered satellite systems using tether length control. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2022 Mar;45(3):580-6.

[39]Shafiq M, Ahmad I, Almatroud OA, Al-Sawalha MM. Robust attitude control of the three-dimensional unknown chaotic satellite system. Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2022 Apr;44(7):1484-504.

[40]Khan A, Kumar S. Study of chaos in chaotic satellite systems. Pramana. 2018 Jan;90:1-9.

[41]Mohammadbagheri A, Yaghoobi M. Lorenz-Type Chaotic attitude control of satellite through predictive control. In2011 Third International Conference on Computational Intelligence, Modelling & Simulation 2011 Sep 20 (pp. 147-152). IEEE.

[42]Rahman ZA, Jasim BH, Al-Yasir YI, Abd-Alhameed RA, Alhasnawi BN. A new no equilibrium fractional order chaotic system, dynamical investigation, synchronization, and its digital implementation. Inventions. 2021 Jul 6;6(3):49.

[43]Matouk AE. Chaotic attractors that exist only in fractional-order case. Journal of Advanced Research. 2023 Mar 1;45:183-92.

[44]Kumar S, Matouk AE, Chaudhary H, Kant S. Control and synchronization of fractional‐ order chaotic satellite systems using feedback and adaptive control techniques. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2021 Apr;35(4):484-97.

[45] Wen XJ, Wu ZM, Lu JG. Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems. IEEE Transactions on circuits and systems II: Express Briefs. 2008 Nov;55(11):1178-82.

[46] Vannelli A, Vidyasagar M. Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems. Automatica. 1985 Jan 1;21(1):69-80.

[47]Rozgonyi S, Hangos KM, Szederkényi G. Improved estimation method of region of stability for nonlinear autonomous systems. In7th International PhD Workshop, Czech Republic 2006.

[48]Chesi G. Estimating the domain of attraction via union of continuous families of Lyapunov estimates. Systems & control letters. 2007 Apr 1;56(4):326-33.

[49]Giesl P, Hafstein S. Existence of piecewise affine Lyapunov functions in two dimensions. Journal of mathematical analysis and applications. 2010 Nov 1;371(1):233-48.

[50] Amato F, Calabrese F, Cosentino C, Merola A. Stability analysis of nonlinear quadratic systems via polyhedral Lyapunov functions. In2008 American Control Conference 2008 Jun 11 (pp. 2291-2296). IEEE.

[51]Liu S, Jiang W, Li X, Zhou XF. Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. Applied Mathematics Letters. 2016 Jan 1;51:13-9.

[52]Lim YH, Oh KK, Ahn HS. Stability and stabilization of fractional-order linear systems subject to input saturation. IEEE Transactions on Automatic Control. 2012 Sep 11;58(4):1062-7.