

## بررسی حرکات آشوبی یک ماهواره و کنترل وضعیت سه محوره ی آن با استفاده از روش مد لغزشی بازگشت به عقب

مصطفی فرامین<sup>۱</sup> و محمد عطایی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان،

Mostafa.faramin@gmail.com

<sup>۲</sup>نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، Ataei@eng.ui.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۰/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱/۲۳)

**چکیده:** در این مقاله بروز پدیده ی آشوب به ازای محدوده ای از پارامترها در دینامیک وضعیت ماهواره با استفاده از نماهای لیاپانف اثبات شده و یک کنترل کننده ی غیر خطی مناسب طراحی می گردد که ضمن حصول عملکرد مطلوب سیستم، کنترل وضعیت آشوبی را نیز تضمین کند. به این منظور با توجه به اینکه معادلات دینامیکی ماهواره ی به صورت یک سیستم غیرخطی ناخودگردان توصیف می شود، ابتدا تکنیکی جهت محاسبه ی نماهای لیاپانف اینگونه سیستم ها که می تواند مبین آشوبی بودن سیستم باشد، ارائه می شود و با استفاده از آن رفتار آشوبناک سیستم در محدوده ای از پارامترها اثبات می گردد. سپس با تبدیل معادلات سیستم به فرم کانونیکال یک کنترل کننده ی مد لغزشی بازگشت به عقب پیشنهاد شده و پایداری سیستم حلقه بسته و مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاشات بر اساس تئوری لیاپانف اثبات می گردد. علاوه بر این با تبدیل سیستم به فرم سازگار با شرایط قضیه ی ملنیکف با استفاده از این روش تحلیلی، حذف پدیده ی آشوب در سیستم کنترل شده تضمین می گردد. محاسبه ی نمای لیاپانف سیستم حلقه بسته نیز مؤید این موضوع است. در پایان نتایج شبیه سازی حاصل از اعمال کنترل کننده ی پیشنهادی برای نواحی مختلف کاری ارائه می گردد.

**کلید واژه:** کنترل وضعیت ماهواره، حرکات آشوبی ماهواره، کنترل مد لغزشی بازگشت به عقب، روش ملنیکف، نمای لیاپانف

### ۱- مقدمه

امروزه بروز بسیاری از نوسانات نامنظم در سیستم های غیرخطی با استفاده از تئوری آشوب مدلسازی می گردد و با توجه به ماهیت قطعی مدل آشوبی، این زمینه به موضوعات مورد علاقه ی تحقیقات علمی تبدیل شده است. حساسیت سیستم های آشوبی به شرایط اولیه و بروز نوسانات نامنظم به دنبال آن موجب گردیده تا وقوع این پدیده در زمینه های مختلف علوم بررسی گردد که از آن جمله می توان به حوزه های پزشکی [۱]، مبدل های قدرت [۲]، موتورهای سنکرون مغناطیس دائم [۳]، راکتورهای شیمیایی [۴] اشاره کرد.

مسئله ی کنترل وضعیت در بسیاری از مقالات مورد توجه قرار گرفته است. در [۵] دو کنترل کننده ی غیرخطی برای ردیابی زوایای وضعیت برای یک ماهواره ی انعطاف پذیر طراحی شد. در [۶] یک کنترل کننده ی مد لغزشی بازگشت به عقب تطبیقی برای یک ماهواره ی انعطاف پذیر در شرایط اشباع محرک ها طراحی شده است. یک کنترل کننده ی مد لغزشی فازی تطبیقی

برای یک ماهواره ی انعطاف پذیر در [۷] طراحی گردیده است. همچنین در [۸] کنترل کننده ای بر اساس تئوری کنترل بهینه برای وضعیت یک ماهواره طراحی گردید. علاوه بر اینها در سالهای گذشته مقالات متعددی به بررسی و کنترل اثر آشوب در دینامیک وضعیت ماهواره پرداخته اند. برای مثال مرجع [۹] درباره ی کنترل وضعیت ماهواره ای که ممان های اینرسی آن به گونه ای انتخاب شده اند که معادلات دینامیکی ماهواره مشابه معادلات سیستم لورنز باشد، بحث کرده است. ناپایداری های آشوبی یک ماهواره ی چرخشی هنگامی که گشتاوری متناوب به آن اعمال می شود در [۱۰] با استفاده از روشهای  $RPF^1$  و فیدبک تاخیردار در [۱۱] با استفاده از تئوری لیپانف کنترل شده است. اخیرا استفاده از روش ملنیکف برای تعیین دینامیک آشوبی ماهواره بسیار مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲]. در مراجع [۱۳، ۱۴] محدوده ی حرکات آشوبی یک ماهواره که تحت تاثیر گشتاور مغناطیسی قرار گرفته است با استفاده از روش ملنیکف محاسبه گردید. سپس این حرکات با استفاده از روش تاخیر زمانی<sup>۲</sup> [۱۴] به یک نقطه ی تعادل و یا یک مدار متناوب پایدار شدند.

در این مقاله روش تجزیه ی  $QR^3$  جهت محاسبه ی نماهای لیپانف سیستم های خودگردان به طور مختصر بیان خواهد شد. با استفاده از این روش وقوع پدیده ی آشوب در یک ماهواره ی همراه با چرخ های عکس العملی که تحت تاثیر گشتاورهای اغتشاشی قرار گرفته است بررسی خواهد شد. برای این منظور از آنجا که معادلات دینامیکی ماهواره، نشان دهنده ی یک سیستم غیرخودگردان است، با در نظر گرفتن زمان  $t$  به عنوان یک متغیر حالت جدید، سیستم را به فرم خودگردان تبدیل می کنیم تا بتوانیم از الگوریتم  $QR$  بیان شده برای محاسبه ی بزرگترین نماهای لیپانف استفاده کنیم. پس از آن با تبدیل معادلات حالت سیستم به فرم کانونیکال کنترل کننده ی مد لغزشی بازگشت به عقب مناسب جهت کنترل وضعیت سه محوره ی ماهواره در حالت آشوبی طراحی می گردد. سپس پایداری سیستم حلقه بسته و مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاشات بر اساس تئوری لیپانف اثبات می شود. همچنین موفقیت کنترل کننده ی ارائه شده در حذف پدیده ی آشوب در سیستم کنترل شده با استفاده از روش ملنیکف و نماهای لیپانف مورد مطالعه قرار می گیرد.

ساختار این مقاله به این صورت است: معادلات ماهواره به همراه اغتشاشات در بخش ۲ توصیف می گردد. در بخش ۳ با استفاده از روش نماهای لیپانف آشوبی بودن این سیستم نشان داده می شود. در بخش ۴ کنترل کننده ای برای پایداری سازی سیستم طراحی می گردد و آنالیز پایداری آن اثبات می شود. در بخش ۵ از روش ملنیکف برای نشان دادن موفقیت کنترل کننده ی طراحی شده در خارج کردن سیستم از ناحیه ی آشوبناک استفاده می شود. در بخش ۶ و ۷ نیز به ترتیب نتایج شبیه سازی و نتیجه گیری بیان می شوند.

## ۲- توصیف معادلات سیستم

### ۲-۱- معادلات سینماتیکی و دینامیکی

رابطه ی بین سرعت زاویه ای و زوایای وضعیت در مختصات اینرسی برای ترتیب چرخش  $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$  به طوری که  $\phi$ ،  $\theta$  و  $\psi$  به ترتیب زوایای چرخش حول محورهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  در دستگاه بدنی باشند، با استفاده از معادلات سینماتیکی زیر بیان می شود [۱۵]:

$$\omega = A^{-1}(\theta)\dot{\theta} \quad (1)$$

<sup>۱</sup> Recursive proportional feedback

<sup>۲</sup> Time delay feedback

<sup>۳</sup> QR-decomposition

که  $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  بردار سرعت زاویه ای،  $\theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$  بردار زوایای وضعیت و  $A^{-1}(\theta)$  به صورت زیر می باشد:

$$A^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

چرخ های عکس العملی یکی از محرک های مورد استفاده در سیستم کنترل وضعیت ماهواره می باشند که توزیع اندازه ی حرکت در درون ماهواره را تغییر می دهند، بدون آنکه در اندازه ی حرکت اینرسی تمام سیستم تغییری صورت گیرد. معادلات دینامیکی ماهواره ای که سه چرخ عکس العملی بر روی محور های بدنی آن قرار گرفته اند، با استفاده از روابط زیر که به معادلات اوپلر معروف است، بیان می شود [۱۶]:

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} = (I_y - I_z)\omega_y\omega_z - \omega_y h_z + \omega_z h_y + T_{dx} + T_{cx} \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} = (I_z - I_x)\omega_x\omega_z - \omega_z h_x + \omega_x h_z + T_{dy} + T_{cy} \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} = (I_x - I_y)\omega_x\omega_y - \omega_x h_y + \omega_y h_x + T_{dz} + T_{cz} \end{cases} \quad (3)$$

که  $I_x$ ،  $I_y$  و  $I_z$  ممان های اصلی اینرسی (به همراه چرخ ها)،  $h_x$ ،  $h_y$  و  $h_z$  درایه های بردار اندازه ی حرکت زاویه ای چرخهای عکس العملی،  $T_{dx}$ ،  $T_{dy}$  و  $T_{dz}$  گشتاورهای اغتشاشی خارجی و  $T_{cx}$ ،  $T_{cy}$  و  $T_{cz}$  گشتاور های کنترلی می باشد. مدل ساده ای از این ماهواره که چرخ های عکسی العملی بر روی محورهای بدنی آن قرار گرفته، در شکل ۱ نشان داده شده است.

## ۲-۲- گشتاورهای اغتشاشی

مطابق با [۱۷] گشتاورهای اغتشاشی خارجی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

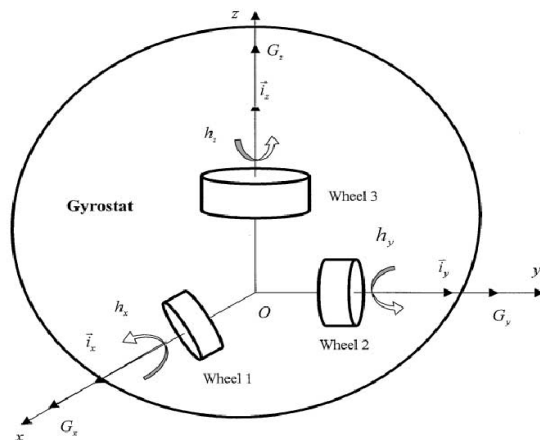
$$\begin{cases} T_{dx} = \varepsilon(\mu_{xx}\omega_x + \mu_{xy}\omega_y + \mu_{xz}\omega_z + \delta_x \sin(\Omega t)) \\ T_{dy} = \varepsilon(\mu_{yx}\omega_x + \mu_{yy}\omega_y + \mu_{yz}\omega_z + \delta_y \sin(\Omega t)) \\ T_{dz} = \varepsilon(\mu_{zx}\omega_x + \mu_{zy}\omega_y + \mu_{zz}\omega_z + \delta_z \sin(\Omega t)) \end{cases} \quad (4)$$

که  $\mu_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) ثابت های میرایی،  $\delta_i$  ( $i = x, y, z$ ) و دامنه و فرکانس گشتاور متناوب و  $\varepsilon$  پارامتر عددی مورد استفاده در روش ملنیکف است که مطابق با این روش در محدوده ی [0 1] در نظر گرفته می شود. سیگنال متناوب گشتاورهای اغتشاشی ناشی از اغتشاش های محیطی مانند تشعشعات خورشیدی است و سایر گشتاورها که به صورت فیدبکی از حالت های سیستم نشان داده شده است به وسیله ی تجهیزات داخل ماهواره تولید شود. در [۱۷] با استفاده از روش ملنیکف ثابت شده است که این گشتاورهای اغتشاشی در محدوده ای از پارامترها باعث آشوبی شدن سیستم ماهواره می شوند.

## ۳- محاسبه ی نماهای لیاپانف

نماهای لیاپانف میانگین نرخهای نمایی برای واگرایی و همگرایی مسیرهای حالت نزدیک به هم در فضای فاز هستند که به عنوان معیاری برای تشخیص حرکتهای آشوبناک شناخته می شوند. روش های متفاوتی برای محاسبه نماهای لیاپانف بر اساس معادلات دینامیکی و سری های زمانی ارائه شده است [۱۸، ۱۹]. یکی از این روش ها محاسبه ی نماهای لیاپانف بر اساس روش تجزیه QR

برای سیستم های پیوسته با دینامیک مشخص می باشد [۲۰]. به طور کلی این روش شامل گام های زیر می باشد:



شکل ۱: مدل ساده ای از یک ماهواره با سه چرخ عکس العملی قرار گرفته بروی محورهای بدنی [۱۷]

(۱) سیستم به صورت یک سیستم پیوسته ی خودگردان با رابطه ی زیر در نظر گرفته می شود:

$$\dot{x}(t) = F(x) \quad (۵)$$

(۲) ماتریس ژاکوبین سیستم در سراسر مسیر محاسبه می گردد:

$$J(x_i) = \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x_i} \quad (۶)$$

که  $x_i$  مقدار حالت های سیستم در پله ی زمانی  $t_i$  ام را بیان می کند.

(۳) ماتریس زیر که به ماتریس نگاشت مماسی<sup>۱</sup> معروف است، تشکیل می شود:

$$J_i = I + J(x_i) * dt \quad (۷)$$

که  $I$  یک ماتریس واحد و  $dt$  زمان نمونه برداری می باشد.

(۴) ماتریس متعامد  $Q_0$  طوری فرض می گردد که  $Q_0 \cdot Q_0^T = I$  باشد.

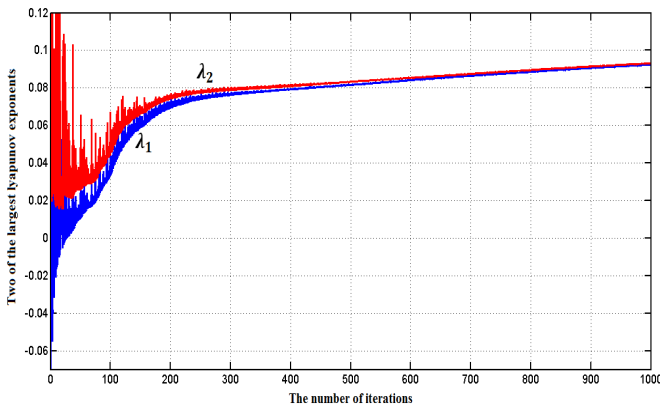
(۵) با استفاده از ماتریس  $J_i$  محاسبه شده در مرحله ی ۳، ماتریس  $Z_{n+1} = J_n \cdot Q_n$  برای  $n = 0, 1, \dots$  تشکیل می شود. سپس ماتریس بدست آمده، با استفاده از روش تجزیه  $QR$  به صورت  $Z_{n+1} = Q_{n+1} \cdot R_{n+1}$  در می آید که  $Q_{n+1}$  ماتریسی متعامد و  $R_{n+1}$  یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت است.

(۶) در مرحله ی آخر نیز طیف نماهای لیاپانوف طبق رابطه زیر قابل محاسبه می باشد:

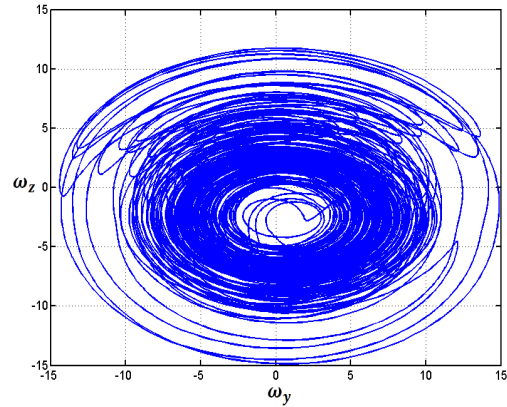
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\text{diag}(R_n \cdot R_{n-1} \dots R_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\text{diag}(R_i)) \quad (۸)$$

<sup>1</sup> Tangent map matrix

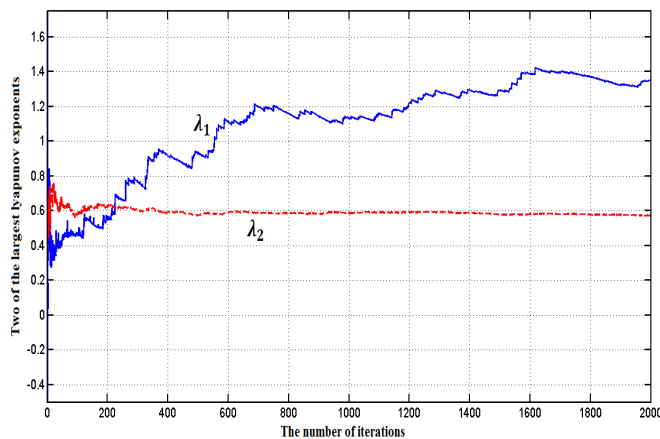
که  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  نمایانگر لیاپانف سیستم هستند که برای هر سیستم به تعداد حالت های آن می باشند. همچنین  $diag(R_i)$  درایه های روی قطر اصلی ماتریس  $R_i$  را بیان می کنند.



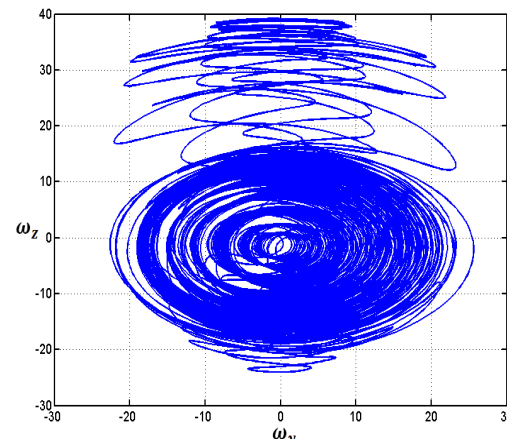
آ. بزرگترین نمایانگر لیاپانف سیستم به ازای  $\varepsilon = 0.05$



ب. پرتره ی فاز  $(\omega_y - \omega_z)$  به ازای  $\varepsilon = 0.05$



پ. بزرگترین نمایانگر لیاپانف سیستم به ازای  $\varepsilon = 0.5$



ت. پرتره ی فاز  $(\omega_y - \omega_z)$  به ازای  $\varepsilon = 0.5$

شکل ۲. بزرگترین نمایانگر لیاپانف و پرتره ی فاز  $(\omega_y - \omega_z)$  به ازای مقادیر مختلف  $\varepsilon$

همانطور که در بخش ۲.۲ گفته شد، در [۱۷] با استفاده از روش ملنیکف اثبات گردید که سیستم ماهواره ی توصیف شده به همراه اغتشاشهای معرفی شده در رابطه ی (۴) دارای حرکات آشوبی می باشد. در اینجا از نمایانگر لیاپانف برای نشان دادن آشوبی بودن سیستم استفاده می کنیم. اما از آنجایی که الگوریتم  $QR$  شرح داده شده برای سیستم های خودگردان تعریف شده است، زمان  $t$  در رابطه (۳) را به عنوان یک متغیر حالت جدید در نظر می گیریم تا با استفاده از این افزایش متغیرهای حالت، سیستم به یک سیستم خودگردان هفت بعدی تبدیل می شود و بتوانیم از روش  $QR$  بیان شده استفاده کنیم. آنگاه مطابق با روش ذکر شده نمایانگر لیاپانف سیستم بدست خواهند آمد. در شکل ۲، دو تا از بزرگترین نمایانگر لیاپانف سیستم در ۱۰۰۰ تکرار اول و با پله ی زمانی ۰/۰۱ و همچنین پرتره ی فاز  $\omega_y - \omega_z$  برای مقادیر مختلف  $\varepsilon$  به ازای شرایط اولیه و پارامترهای معرفی شده در جدول ۲ نشان داده شده است. این شکل ها بیان می کنند که به ازای  $0 < \varepsilon < 1$  سیستم دو نمایانگر لیاپانف مثبت دارد که نشان دهنده ی سیستمی فوق آشوبناک است. همچنین مطابق با این شکل ها هرچه میزان  $\varepsilon$  بیشتر شود، نمایانگر لیاپانف سیستم بزرگتر می شود.

## ۴- طراحی کنترل کننده مد لغزشی بازگشت به عقب

### ۴-۱- تبدیل معادلات حالت به فرم کانونیکال

برای آنکه بتوانیم طراحی کنترل کننده را آسانتر انجام دهیم، معادلات حالت سیستم را به صورت کانونیکال در می آوریم. برای این کار با ترکیب رابطه های (۱)، (۳) و (۴) داریم:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = A(\theta)\omega \\ \dot{\omega} = B^{-1}(f(\omega_x, \omega_y, \omega_z) + \varepsilon\mu\omega + \varepsilon\delta\sin(\Omega t) + T_c) \end{cases} \quad (9)$$

که  $f(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ،  $\delta$ ،  $\mu$  ماتریس میرایی و  $B$  ماتریس ممان اینرسی به صورت زیر می باشند:

$$f = \begin{bmatrix} (I_y - I_z)\omega_y\omega_z - h_z\omega_y + h_y\omega_z \\ (I_z - I_x)\omega_x\omega_z - h_x\omega_z + h_z\omega_x \\ (I_x - I_y)\omega_x\omega_y - h_y\omega_x + h_x\omega_y \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\delta = [\delta_x \quad \delta_y \quad \delta_z]^T$$

$$B = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$$

با فرض  $X_1 = \theta$  و  $X_2 = A(\theta)\omega$  معادلات حالت (۹) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = \dot{A}\omega + A\dot{\omega} = \dot{A}A^{-1}X_2 + AB^{-1}(f + \mu X_2 + \delta \sin(\Omega t) + T_c) \end{cases} \quad (11)$$

### ۴-۲- طراحی قانون کنترلی

در این مرحله قانون کنترلی برای پایداری سیستم در حضور اغتشاشات طراحی می شود. لذا از آنجایی که در عمل اطلاعاتی در مورد دینامیک اغتشاشات نداریم، می توانیم آن را به صورت  $|AB^{-1}T_d| \leq D$  در نظر بگیریم. پس رابطه ی (۱۱) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = \dot{A}A^{-1}X_2 + AB^{-1}f + D + AB^{-1}T_c \end{cases} \quad (12)$$

پروژه ی طراحی کنترل کننده مد لغزشی بازگشت به عقب به صورت زیر می باشد:

**گام اول:** برای مسئله ی ردیابی زوایای وضعیت، بردار خطای ردیابی به صورت  $Z_1 = X_1 - X_{1d}$  تعریف می شود که در آن  $X_{1d}$  مقدار مطلوب زوایای وضعیت می باشد. اولین تابع لیاپانف به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$V_1 = \frac{1}{2}Z_1^T Z_1 \quad (13)$$

بر طبق تکنیک طراحی بازگشت به عقب، عامل پایدار ساز  $\alpha_1 = cZ_1$  تعریف می شود که  $c$  یک پارامتر مثبت است. با استفاده از این عامل پایدار ساز، بردار دوم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Z_2 = \dot{Z}_1 + \alpha_1 = \dot{X}_1 + \alpha_1 \quad (۱۴)$$

آن گاه مشتق اولین تابع لیاپانف به صورت زیر نتیجه گرفته می شود:

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2}\dot{Z}_1^T Z_1 + \frac{1}{2}Z_1^T \dot{Z}_1 = Z_1^T \dot{Z}_1 = Z_1^T (Z_2 - \alpha_1) = Z_1^T (Z_2 - cZ_1) = -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 \quad (۱۵)$$

**گام دوم:** با استفاده از متغیرهای جدید تعریف شده، معادلات دینامیکی رابطه ی (۱۲) به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \dot{X}_1 \\ \dot{Z}_2 = \dot{X}_2 + \dot{\alpha}_1 = \dot{A}A^{-1}X_2 + AB^{-1}f + D + \dot{\alpha}_1 + AB^{-1}T_c \end{cases} \quad (۱۶)$$

سطح لغزشی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$S = kZ_1 + Z_2 \Rightarrow \dot{S} = k\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = k(Z_2 - \alpha_1) + \dot{Z}_2 \quad (۱۷)$$

جایی که  $k$  یک پارامتر مثبت می باشد. تابع لیاپانف دوم به صورت زیر انتخاب می شود:

$$V_2 = \frac{1}{2}Z_1^T Z_1 + \frac{1}{2}S^T S \quad (۱۸)$$

مشتق این تابع لیاپانف می تواند به صورت زیر تعیین شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= Z_1^T \dot{Z}_1 + S^T \dot{S} = -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 + S^T (k(Z_2 - \alpha_1) + \dot{Z}_2) \\ &= -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 + S^T (k(Z_2 - \alpha_1) + \dot{A}A^{-1}X_2 + AB^{-1}f + D + \dot{\alpha}_1 + AB^{-1}T_c) \end{aligned} \quad (۱۹)$$

قانون کنترلی سطح لغزشی بازگشت به عقبی که تابع لیاپانف  $\dot{V}_2$  را پایدار می کند، برابر است با:

$$T_c = BA^{-1} \left( -k(Z_2 - \alpha_1) - \dot{A}A^{-1}X_2 - AB^{-1}f - \dot{\alpha}_1 - h(S + \beta \text{sign}(S)) \right) \quad (۲۰)$$

جایی که  $\beta$  یک پارامتر مثبت می باشد و داریم:

$$\text{sign}(S) = \begin{cases} 1 & \text{for } S > 0 \\ 0 & \text{for } S = 0 \\ -1 & \text{for } S < 0 \end{cases} \quad (۲۱)$$

لذا می توانیم قضیه ی زیر را بیان کنیم:

**قضیه ۱:** برای سیستم شرح داده شده با معادله ی رابطه ی (۱۱)، کنترل کننده ی پیشنهاد شده ی معادله ی (۲۰) همگرایی مجانبی به مقادیر مطلوب زوایای وضعیت در حضور اغتشاشات را بیان می کند، یعنی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_1, Z_2 = 0 \quad (22)$$

**اثبات:** پس از جایگذاری قانون کنترلی رابطه ی (۲۰) در معادله ی (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 + S^T(D - hS - h\beta \text{sign}(S)) \\ &= -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 - hS^T S + S^T(D - h\beta \text{sign}(S)) \end{aligned} \quad (23)$$

برای اثبات پایداری لازم است تا ماتریس انتقالی  $Q$  را به عنوان یک ماتریس متقارن معین مثبت به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} c + hk^2 & hk - \frac{1}{2} \\ hk - \frac{1}{2} & h \end{bmatrix} \quad (24)$$

آنگاه داریم:

$$Z^T Q Z = [Z_1 \quad Z_2] \begin{bmatrix} c + hk^2 & hk - \frac{1}{2} \\ hk - \frac{1}{2} & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = cZ_1^T Z_1 - Z_1^T Z_2 + hS^T S \quad (25)$$

که  $Z = [Z_1 \quad Z_2]^T$  می باشد. در ادامه ی اثبات پایداری از رابطه ی (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -(cZ_1^T Z_1 - Z_1^T Z_2 + hS^T S) + S^T(D - h\beta \text{sign}(S)) = \\ &= -Z^T Q Z + S^T(D - h\beta \text{sign}(S)) \end{aligned} \quad (26)$$

برای ماتریس  $Q$  داریم:

$$|Q| = \begin{vmatrix} c + hk^2 & hk - \frac{1}{2} \\ hk - \frac{1}{2} & h \end{vmatrix} = h(c + k) - \frac{1}{4} > 0 \quad (27)$$

اگر پارامترهای  $h$ ،  $c$  و  $k$  به گونه ای انتخاب شوند که شرط  $|Q| = h(c + k) - \frac{1}{4} > 0$  برقرار باشد و  $h\beta$  نیز به اندازه ی کافی بزرگ باشد که شرط  $h\beta \geq D$  برقرار گردد، آنگاه طبق رابطه ی زیر ثابت می شود که  $\dot{V}_2 \leq 0$  است:

$$S^T(D - h\beta \text{sign}(S)) = \begin{cases} S^T(D - h\beta) \leq 0 & S > 0 \\ S^T(D + h\beta) \leq 0 & S < 0 \end{cases} \quad (28)$$

لذا  $Z_1$  و  $Z_2$  طبق [۲۱] به صفر همگرا خواهند شد. پایداری کنترل کننده ی مد لغزشی بازگشت به عقب تضمین می گردد و قضیه ۱ ثابت می شود.

**تذکره:** یکی از مشکلات کنترل کننده ی مد لغزشی، پدیده ی چترینگ می باشد که ناشی از تابع  $\text{Sign}$  است. لذا در شبیه سازی ها برای جلوگیری از این پدیده یک کنترل کننده فازی برای تقریب تابع  $\text{Sign}$  مطابق آنچه در [۲۲] آمده، طراحی می شود.

$$u_{fuzzy} = FC(S, \dot{S}) \quad (29)$$

در نتیجه ورودی کنترلی رابطه ی (۲۰) به صورت زیر اصلاح می گردد:



$$T_c = BA^{-1} \left( -k(Z_2 - \alpha_1) - \dot{A}A^{-1}X_2 - AB^{-1}f - \dot{\alpha}_1 - h(S + \beta u_{fuzzy}) \right) \quad (30)$$

## ۵- آنالیز ملنیکف برای اثبات موفقیت روش کنترلی پیشنهادی برای جلوگیری از حرکت آشوبناک

روش ملنیکف یک ابزار ریاضی می باشد که به طور دقیق و تحلیلی تقاطع مشترک مدارات هیترودینامیک را جستجو می کند و می تواند آستانه رفتارهای نامنظم را پیش بینی کند. برای جزئیات بیشتر در مورد تئوری ملنیکف می توانید مرجع [۲۳] را دنبال کنید. در این بخش می خواهیم با استفاده از این روش ثابت کنیم که کنترل کننده ی طراحی شده توانسته است سیستم را از ناحیه ی آشوبی خارج نماید. هدف از طرح این موضوع بیان این ایده است که امکان دارد بتوان در کارهای آینده از روش ملنیکف برای طراحی کنترل کننده ای استفاده کرد که یک سیستم آشوبی را از ناحیه ی آشوبناک خارج نماید.

برای استفاده از روش ملنیکف باید مدل سیستم به صورت زیر در آید:

$$\dot{x}(t) = f(x) + \varepsilon g(x, \tau) \quad (31)$$

جایی که  $g$  متناوب با دوره ی تناوب  $T$  در  $T$ ،  $f(x)$  میدان برداری و  $\varepsilon g(x, \tau)$  یک انحراف کوچک از سیستم مورد نظر می باشد. بر طبق نتایج [۲۴] تابع ملنیکف برای سیستم های بالاتر از مرتبه ی از دو به صورت زیر می باشد:

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H[q_0(\tau)] \{f[q_0(\tau)] + g[q_0(\tau), \tau + \tau_0]\} d\tau \quad (32)$$

جایی که  $\nabla H$  گرادیان با توجه به تابع همیلتونین،  $f$  بخش منحرف نشده و  $g$  بخش منحرف شده از معادلات سیستم و  $q_0(\tau)$  حل معادلات سیستم منحرف نشده ( $\varepsilon = 0$ ) می باشد.

برای سیستم ماهواره ی توصیف شده، تابع همیلتونی که در واقع انرژی جنبشی سیستم منحرف نشده را بیان می کند به صورت  $H = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$  است که گرادیان آن به صورت  $\nabla H = \{I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z\}$  بدست می آید.

برای بحث در مورد نتایج تابع ملنیکف لازم است که قضیه ی زیر بیان شود:

**قضیه ۲ [۲۵]:** اگر تابع ملنیکف  $M(\tau_0)$  تعریف شده با معادله ی (۳۲)  $M(\tau_0) \neq 0$  باشد، یعنی برای همه ی  $\tau_0$  ها شرطهای  $M(\tau_0) > 0$  یا  $M(\tau_0) < 0$  برقرار باشد، آن گاه برای همه ی  $\varepsilon \neq 0$  هیچ نقطه ی تقاطعی بین خمینه های پایدار  $W^s(x_\varepsilon)$  و ناپایدار  $W^u(x_\varepsilon)$  (نقطه ی تعادل سیستم (۳۱) می باشد) وجود ندارد و داریم  $W^s(x_\varepsilon) \cap W^u(x_\varepsilon) = \emptyset$ . در این صورت سیستم هیچگونه حرکت آشوبناکی نخواهد داشت.

همانطور که پیش از این گفته شد برای استفاده از روش ملنیکف ابتدا باید معادلات سیستم را به شکل رابطه ی (۳۱) در آوریم. لذا با قرار دادن  $T_{dx}$ ،  $T_{dy}$  و  $T_{dz}$  از رابطه ی (۴) و  $T_{cx}$ ،  $T_{cy}$  و  $T_{cz}$  از رابطه ی (۲۰) در معادله ی (۳) و پس از پاره ای از محاسبات معادلات حالت سیستم به صورت زیر در می آید:

<sup>1</sup> Manifold

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = -\frac{(k+c+h)}{I_x} \omega_x + \frac{\varepsilon}{I_x} (\mu_{xx}\omega_x + \mu_{xy}\omega_y + \mu_{xz}\omega_z + \delta_x \sin(\Omega t)) + h.o.t \\ \dot{\omega}_y = -\frac{(k+c+h)}{I_y} \omega_y + \frac{\varepsilon}{I_y} (\mu_{yx}\omega_x + \mu_{yy}\omega_y + \mu_{yz}\omega_z + \delta_y \sin(\Omega t)) + h.o.t \\ \dot{\omega}_z = -\frac{(k+c+h)}{I_z} \omega_z + \frac{\varepsilon}{I_z} (\mu_{zx}\omega_x + \mu_{zy}\omega_y + \mu_{zz}\omega_z + \delta_z \sin(\Omega t)) + h.o.t \end{cases} \quad (33)$$

که  $h.o.t$  بیان کننده ی ترم های مرتبه ی بالا می باشد که بدون از دست دادن کلیت مسئله می توانیم از آنها صرف نظر کنیم. با حل این مجموعه معادلات برای  $\varepsilon = 0$  داریم:

$$\omega_x = \omega_x(0)e^{-\frac{p}{I_x}t} \quad \omega_y = \omega_y(0)e^{-\frac{p}{I_y}t} \quad \omega_z = \omega_z(0)e^{-\frac{p}{I_z}t} \quad (34)$$

جایی که  $p = k + c + h$  و  $\omega_x(0)$ ،  $\omega_y(0)$  و  $\omega_z(0)$  شرایط اولیه ی سرعت های زاویه ای را بیان می کنند. در این مرحله می توانیم انتگرال ملنیکف (۳۲) را برای این سیستم گسترش دهیم:

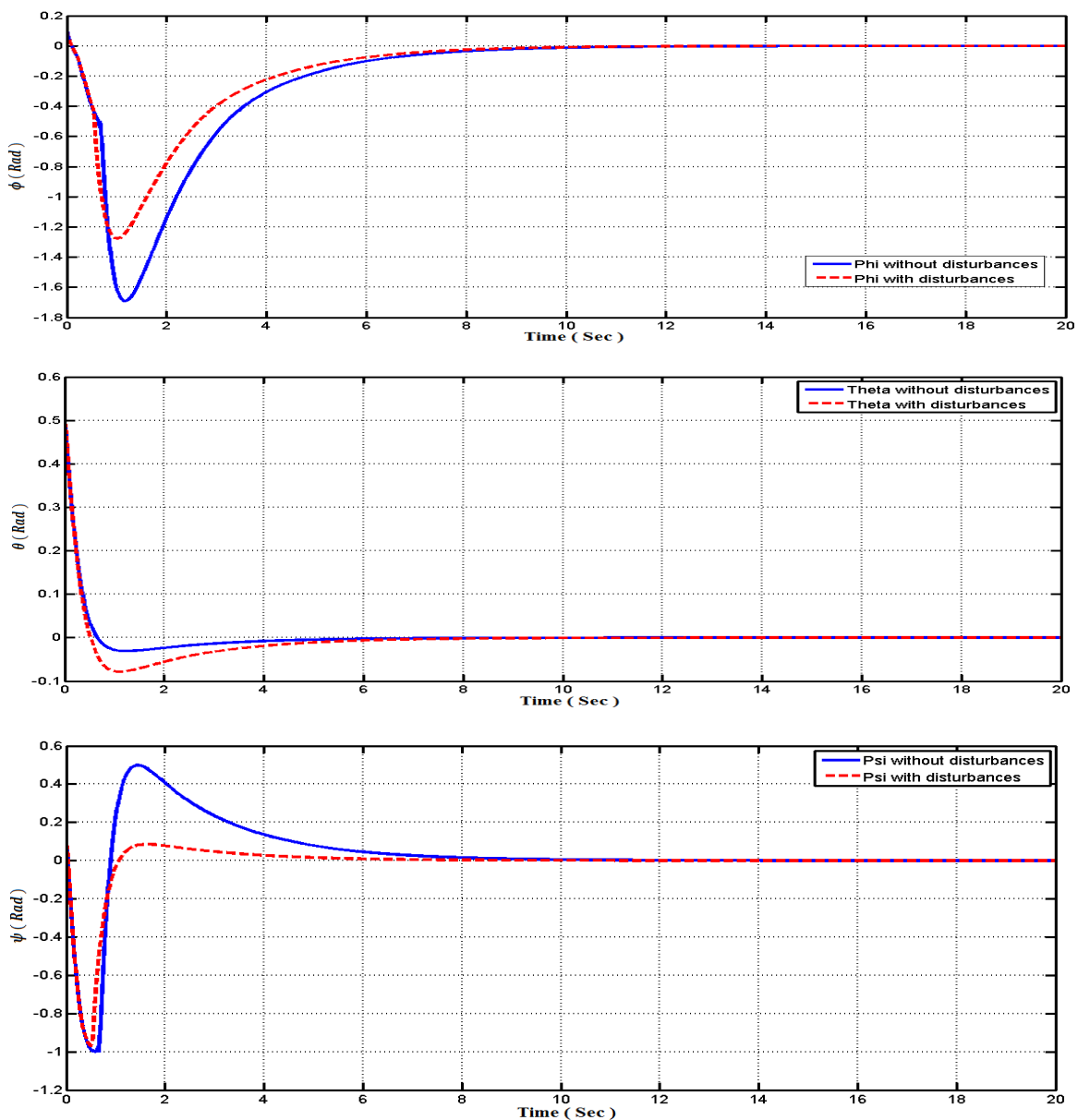
$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-p\omega_x^2 + \mu_{xx}\omega_x^2 + \mu_{xy}\omega_x\omega_y + \mu_{xz}\omega_x\omega_z + \delta_x\omega_x \sin(\Omega(\tau + \tau_0))) dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} (-p\omega_y^2 + \mu_{yy}\omega_y^2 + \mu_{yx}\omega_x\omega_y + \mu_{yz}\omega_y\omega_z + \delta_y\omega_y \sin(\Omega(\tau + \tau_0))) dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} (-p\omega_z^2 + \mu_{zz}\omega_z^2 + \mu_{zy}\omega_y\omega_z + \mu_{zx}\omega_x\omega_z + \delta_z\omega_z \sin(\Omega(\tau + \tau_0))) dt \end{aligned} \quad (35)$$

با جایگذاری رابطه ی (۳۴) در معادله ی (۳۵) داریم:

$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= (\mu_{xx} - p)\omega_x^2(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2p}{I_x}t} dt + (\mu_{xy} + \mu_{yx})\omega_x(0)\omega_y(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\left(\frac{I_y+I_x}{I_x I_y}\right)t} dt \\ &+ (\mu_{yy} - p)\omega_y^2(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2p}{I_y}t} dt + (\mu_{xz} + \mu_{zx})\omega_x(0)\omega_z(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\left(\frac{I_z+I_x}{I_x I_z}\right)t} dt \\ &+ (\mu_{zz} - p)\omega_z^2(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2p}{I_z}t} dt + (\mu_{yz} + \mu_{zy})\omega_y(0)\omega_z(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\left(\frac{I_z+I_y}{I_z I_y}\right)t} dt \\ &+ \delta_x\omega_x(0) \cos(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_x}t} \sin(\Omega\tau) dt + \delta_x\omega_x(0) \sin(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_x}t} \cos(\Omega\tau) dt \\ &+ \delta_y\omega_y(0) \cos(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_y}t} \sin(\Omega\tau) dt + \delta_y\omega_y(0) \sin(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_y}t} \cos(\Omega\tau) dt \\ &+ \delta_z\omega_z(0) \cos(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_z}t} \sin(\Omega\tau) dt + \delta_z\omega_z(0) \sin(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_z}t} \cos(\Omega\tau) dt = \infty \end{aligned} \quad (36)$$

همانطور که مشاهده می شود حاصل این تابع به ازای هر فرکانس و شرایط اولیه ای بی نهایت می باشد که برطبق قضیه ۲ به معنی  $W^s(x_\varepsilon) \cap W^u(x_\varepsilon) = \emptyset$  است که بیان کننده عدم وجود تقاطع بین خمینه های پایدار و ناپایدار می باشد. در واقع این نتیجه بیان کننده ی این موضوع می باشد که کنترل کننده ی طراحی شده توانسته است سیستم را از ناحیه ی آشوبی خارج کند.

از طرفی نماهای لیاپانف برای سیستم حلقه بسته بر اساس الگوریتم QR محاسبه شده و در جدول ۱ آمده است. همانطور که از این جدول نیز قابل استخراج است، تمام نماهای لیاپانف برای سیستم کنترل شده منفی می باشد که بار دیگر موفقیت کنترل کننده در خارج کردن سیستم از ناحیه ی آشوبی را نشان می دهد.



شکل ۳. رفتار زوایای وضعیت  $\phi$ ،  $\theta$  و  $\psi$  بدون حضور اغتشاشات و در حضور اغتشاشات

جدول ۱. نماهای لیاپانف برای سیستم حلقه بسته

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$
سیستم حلقه بسته	-0.388	-0.515	-0.89	-3.79	-4.086	-4.396	0

## ۶- نتایج شبیه سازی

در این بخش می خواهیم نتایج حاصل از شبیه سازی کنترل کننده طراحی شده برای کنترل وضعیت ماهواره را مشاهده کنیم. برای حل معادلات دیفرانسیل مورد نظر از روش *Runge-Kutta* مرتبه ی ۴ با پله های زمانی ۰/۰۱ استفاده کردیم. شرایط اولیه و پارامترهای فیزیکی به شرح ذیل می باشد:

**شرایط اولیه:**

$$\theta(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} -1.7121 \\ -1.6877 \\ -4.7917 \end{bmatrix}$$

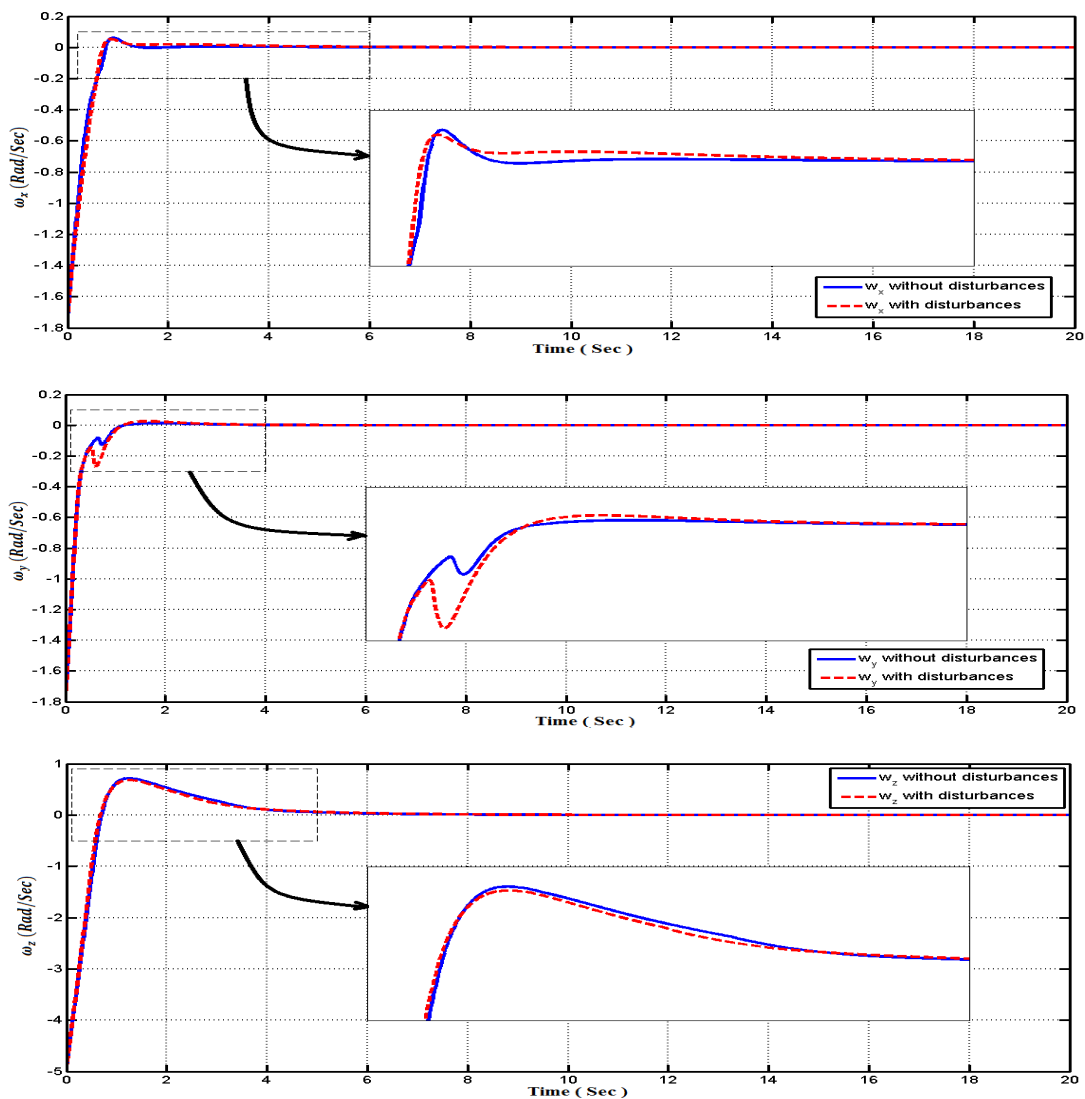
**پارامترهای فیزیکی:**

$$I_x = 12 \text{ (kg m}^2\text{)} \quad I_y = 9.5 \text{ (kg m}^2\text{)} \quad I_z = 6 \text{ (kg m}^2\text{)} \quad \Omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$h_x = 5.4768 \text{ (N m s)} \quad h_y = 1.1789 \text{ (N m s)} \quad h_z = -13.4327 \text{ (N m s)}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} -0.519 & -10.635 & 0.6899 \\ 10.125 & -0.856 & -1.780 \\ 2.567 & 1.859 & -0.956 \end{bmatrix} \text{ (N m s)} \quad \delta = \begin{bmatrix} -659.8632 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix} \text{ (N m)}$$

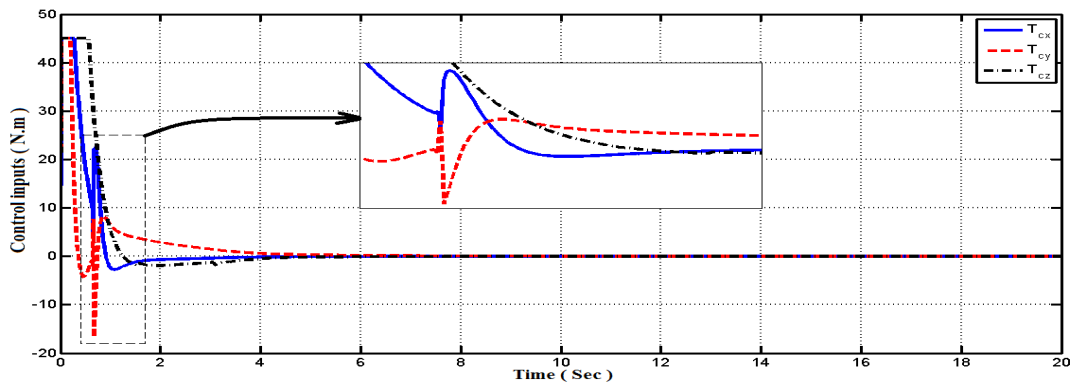
در مورد ماهواره هایی که به روش پایدار سازی سه محوره کنترل می شوند در حالت پایدار نامی، دستگاه مختصات بدنه و دستگاه مختصات مدار با هم منطبق شوند. لذا مقدار مطلوب زوایای وضعیت برای کنترل وضعیت سه محوره  $X_{1d} = [0 \ 0 \ 0]^T$  می باشد. پارامترهای طراحی  $c = 2$ ،  $k = 1.8$ ،  $h = 0.9$  و  $\beta = 0.6$  را به روش سعی و خطا به گونه ای انتخاب می کنیم که شرطهای  $h\beta \geq D$  و  $h(c+k) - \frac{1}{4} > 0$  را برقرار کند. در شکل های ۳ و ۴ پاسخ زمانی زوایای وضعیت و سرعت های زاویه ای سیستم حلقه بسته بدون گشتاورهای اغتشاشی (خطوط پیوسته) و همچنین همراه با گشتاورهای اغتشاشی (خطوط گسسته) نشان داده شده است. همانطور که از این شکل ها مشخص است، حالتی سیستم پس از اعمال کنترل کننده در هر دو حالت رفتار های تقریباً مشابهی دارند و به سرعت به سمت صفر میل می کنند که نشان دهنده ی توانایی کنترل کننده ی طراحی شده برای حذف اثرات اغتشاش می باشد. شکل ۵ و ۶ نیز عملکرد ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم را به ترتیب در غیاب اغتشاشات و در حضور اغتشاشات نشان می دهد. همانطور که از شکل ۶ مشخص است، ورودی کنترلی به وسیله ی یک محدود کننده با دامنه ی ۴۵ محدود شده است تا از ضربه ناگهانی با دامنه ی زیاد در لحظات اول جلوگیری شود. همچنین دامنه ی نوسانات موجود در این شکل، تلاش های ورودی کنترلی برای حذف اثرات گشتاورهای اغتشاشی را بیان می کند.



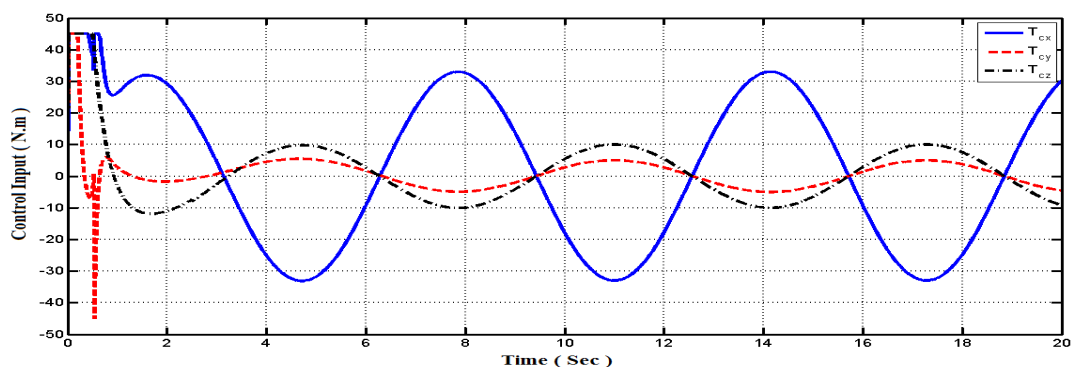
شکل ۴. رفتار زوایای وضعیت  $\omega_x$ ،  $\omega_y$ ،  $\omega_z$  بدون حضور اغتشاشات و در حضور اغتشاشات

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله مسئله ی کنترل وضعیت یک ماهواره مورد بررسی قرار گرفت و حرکات آشوبی آن با استفاده از نماهای لیاپانف نشان داده شد. یک کنترل کننده مد لغزشی بازگشت به عقب که پایداری مجانبی کلی سیستم را تضمین می کند با استفاده از روش پایداری لیاپانف طراحی شد و مقاوم بودن این کنترل کننده در مقابل اغتشاشات اعمالی به ماهواره اثبات گردید. برای جلوگیری از پدیده ی چترینگ در کنترل کننده مد لغزشی یک بلوک فازی به نحوی طراحی شد که تابع  $Sign$  را تقریب بزند. نتایج شبیه سازی نیز کارآیی روش کنترلی پیشنهاد شده و مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاشات اعمال شده را به خوبی نشان می دهد. سپس از روشهای ملنیکف و نماهای لیاپانف علاوه بر روش لیاپانف استفاده شد تا نشان داده شود که روش کنترلی توانسته حرکات آشوبی سیستم منحرف شده را به خوبی کنترل و آن را از ناحیه ی آشوبناک خارج نماید. نتایج روش ملنیکف نشان می دهد که شاید در کارهای آینده بتوان از این روش برای طراحی کنترل کننده ای استفاده کرد که بتواند یک سیستم آشوبی را از ناحیه ی آشوبناک خارج نماید.



شکل ۵: گشتاور های کنترلی ماهواره  $T_{cx}$ ،  $T_{cy}$ ،  $T_{cz}$  در غیاب اغتشاشات



شکل ۶: گشتاور های کنترلی ماهواره  $T_{cx}$ ،  $T_{cy}$ ،  $T_{cz}$  در حضور اغتشاشات

## مراجع

- [1] M. E. Cohen, D. L. Hudson, and P. C. Deedwania, "Applying continuous chaotic modeling to cardiac signal analysis," *Engineering in Medicine and Biology Magazine, IEEE*, vol. 15, pp. 97-102, 1996.
- [2] B. Basak and S. Parui, "Exploration of bifurcation and chaos in buck converter supplied from a rectifier," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 25, pp. 1556-1564, 2010.
- [3] H. Ren and D. Liu, "Nonlinear feedback control of chaos in permanent magnet synchronous motor," *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol. 53, pp. 45-50, 2006.
- [4] S. Rasoulia, M. Shahrokhi, and H. Salarieh, "Control of a Chemical Reactor with Chaotic Dynamics," *Iran. J. Chem. Chem. Eng. Vol.*, vol. 29, 2010.
- [5] M. Malekzadeh, A. Naghash, and H. Talebi, "A Robust Nonlinear Control Approach for Tip Position Tracking of Flexible Spacecraft," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 2423-2434, 2011.
- [6] B. Xiao, Q. Hu, and Y. Zhang, "Adaptive sliding mode fault tolerant attitude tracking control for flexible spacecraft under actuator saturation," *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol. 20, pp. 1605-1612, 2012.
- [7] P. Guan, X.-J. Liu, and J.-Z. Liu, "Adaptive fuzzy sliding mode control for flexible

- satellite," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 18, pp. 451-459, 6// 2005.
- [8] N. M. Horri, P. Palmer, and M. Roberts, "Gain-Scheduled Inverse Optimal Satellite Attitude Control," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 2437-2457, 2012.
- [9] K. Kemih, A. Kemiha, and M. Ghanes, "Chaotic attitude control of satellite using impulsive control," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 42, pp. 735-744, 2009.
- [10] P. Meehan and S. Asokanathan, "Control of chaotic motion in a spinning spacecraft with a circumferential nutational damper," *Nonlinear Dynamics*, vol. 17, pp. 269-284, 1998.
- [11] P. Meehan and S. Asokanathan, "Control of chaotic instabilities in a spinning spacecraft with dissipation using Lyapunov's method," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 13, pp. 1857-1869, 2002.
- [12] Y. Baozeng and X. Jiafang, "Chaotic attitude maneuvers in spacecraft with a completely liquid-filled cavity," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, pp. 643-656, 2007.
- [13] M. Iñarrea, "Chaotic Pitch Motion of a Magnetic Spacecraft with Viscous Drag in AN Elliptical Polar Orbit," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 21, pp. 1959-1975, 2011.
- [14] M. Iñarrea, "Chaos and its control in the pitch motion of an asymmetric magnetic spacecraft in polar elliptic orbit," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 40, pp. 1637-1652, 2009.
- [15] X. Tong, B. Tabarrok, and F. P. J. Rimrott, "Chaotic motion of an asymmetric gyrostat in the gravitational field," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 30, pp. 191-203, 5// 1995.
- [16] M. H. Kaplan, "Modern spacecraft dynamics and control," *New York, John Wiley and Sons, Inc., 1976. 427 p.*, vol. 1, 1976.
- [17] J. Kuang, S. Tan, K. Arichandran, and A. Leung, "Chaotic dynamics of an asymmetrical gyrostat," *International journal of non-linear mechanics*, vol. 36, pp. 1213-1233, 2001.
- [18] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, "determining lyapunov exponents from a time series," *Physica 16D*, vol. 32, pp. 285-317, 1985.
- [19] K. Geist, U. Parlitz, and W. Lauterborn, "Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents," *Progress of Theoretical Physics*, vol. 83, pp. 875-893, 1990.
- [20] H. F. Von Bremen, F. E. Udwardia, and W. Proskurowski, "An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 101, pp. 1-16, 1997.
- [21] P. A. Ioannou and B. Fidan, *Adaptive control tutorial* vol. 3600: Society for industrial and applied mathematics Philadelphia, PA, 2006.
- [22] H.-T. Yau, "Chaos synchronization of two uncertain chaotic nonlinear gyros using fuzzy sliding mode control," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, pp. 408-418, 2008.

- [23] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* vol. 2: Springer Verlag, 2003.
- [24] P. J. Holmes and J. E. Marsden, "Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups," DTIC Document 1981.
- [25] V. K. m. Mel'nikov, "On the stability of a center for time-periodic perturbations," *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 12, pp. 3-52, 1963.