

## بررسی حرکات آشوبی یک ماهواره و کنترل وضعیت سه محوره‌ی آن با استفاده از روش مد لغزشی بازگشت به عقب

مصطفی فرامین<sup>۱</sup> و محمد عطایی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان،

Mostafa.faramin@gmail.com

<sup>۲</sup>نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، Ataei@eng.ui.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۰/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱/۲۳)

**چکیده:** در این مقاله بروز پدیده‌ی آشوب به ازای محدوده‌ای از پارامترها در دینامیک وضعیت ماهواره با استفاده از نماهای لیپانف اثبات شده و یک کنترل کننده‌ی غیر خطی مناسب طراحی می‌گردد که ضمن حصول عملکرد مطلوب سیستم، کنترل وضعیت آشوبی را نیز تضمین کند. به این منظور با توجه به اینکه معادلات دینامیکی ماهواره‌ی به صورت یک سیستم غیرخطی ناخودگردن توصیف می‌شود، ابتدا تکنیکی جهت محاسبه‌ی نماهای لیپانف اینگونه سیستم‌ها که می‌تواند میان آشوبی بودن سیستم باشد، ارائه می‌شود و با استفاده از آن رفتار آشوبناک سیستم در محدوده‌ای از پارامترها اثبات می‌گردد. سپس با تبدیل معادلات سیستم به فرم کانوئیکال یک کنترل کننده‌ی مد لغزشی بازگشت به عقب پیشنهاد شده و پایداری سیستم حلقه بسته و مقاوم بودن آن در مقابل اختشاشات بر اساس تئوری لیپانف اثبات می‌گردد. علاوه بر این با تبدیل سیستم به فرم سازگار با شرایط قضیه‌ی ملنیکف با استفاده از این روش تحلیلی، حذف پدیده‌ی آشوب در سیستم کنترل شده تضمین می‌گردد. محاسبه‌ی نمای لیپانف سیستم حلقه بسته نیز مؤید این موضوع است. در پایان نتایج شبیه سازی حاصل از اعمال کنترل کننده‌ی پیشنهادی برای نواحی مختلف کاری ارائه می‌گردد.

**کلید واژه:** کنترل وضعیت ماهواره، حرکات آشوبی ماهواره، کنترل مد لغزشی بازگشت به عقب، روش ملنیکف، نمای لیپانف

### ۱- مقدمه

امروزه بروز بسیاری از نوسانات نامنظم در سیستم‌های غیرخطی با استفاده از تئوری آشوب مدل‌سازی می‌گردد و با توجه به ماهیت قطعی مدل آشوبی، این زمینه به موضوعات مورد علاقه‌ی تحقیقات علمی تبدیل شده است. حساسیت سیستم‌های آشوبی به شرایط اولیه و بروز نوسانات نامنظم به دنبال آن موجب گردیده تا وقوع این پدیده در زمینه‌های مختلف علوم بررسی گردد که از آن جمله می‌توان به حوزه‌های پژوهشی [۱]، مدل‌های قدرت [۲]، موتورهای سنکرون مغناطیس دائم [۳]، راکتورهای شیمیایی [۴] اشاره کرد.

مسئله‌ی کنترل وضعیت در بسیاری از مقالات مورد توجه قرار گرفته است. در [۵] دو کنترل کننده‌ی غیرخطی برای ردیابی زوایای وضعیت برای یک ماهواره‌ی انعطاف پذیر طراحی شد. در [۶] یک کنترل کننده‌ی مد لغزشی بازگشت به عقب تطبیقی برای یک ماهواره‌ی انعطاف پذیر در شرایط اشباع محرك‌ها طراحی شده است. یک کنترل کننده‌ی مد لغزشی فازی تطبیقی

برای یک ماهواره‌ی انعطاف پذیر در [۷] طراحی گردیده است. همچنین در [۸] کنترل کننده‌ای بر اساس تئوری کنترل بهینه برای وضعیت یک ماهواره طراحی گردید. علاوه بر اینها در سالهای گذشته مقالات متعددی به بررسی و کنترل اثر آشوب در دینامیک وضعیت ماهواره پرداخته‌اند. برای مثال مرجع [۹] درباره‌ی کنترل وضعیت ماهواره‌ای که ممان‌های اینرسی آن به گونه‌ای اختبار شده‌اند که معادلات دینامیکی ماهواره مشابه معادلات سیستم لورنز باشد، بحث کرده است. ناپایداری‌های آشوبی یک ماهواره‌ی چرخشی هنگامی که گشتاوری متناظر به آن اعمال می‌شود در [۱۰] با استفاده از روش‌های  $RPF$ <sup>۱</sup> و فیدبک تاخیردار در [۱۱] با استفاده از تئوری لیاپانف کنترل شده است. اخیراً استفاده از روش ملینیکف برای تعیین دینامیک آشوبی ماهواره بسیار مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲]. در مراجع [۱۳، ۱۴] محدوده‌ی حرکات آشوبی یک ماهواره که تحت تاثیر گشتاور مغناطیسی قرار گرفته است با استفاده از روش ملینیکف محاسبه گردید. سپس این حرکات با استفاده از روش تاخیر زمانی<sup>۲</sup> [۱۴] به یک نقطه‌ی تعادل و یا یک مدار متناظر پایدار شدند.

در این مقاله روش تجزیه‌ی  $QR$ <sup>۳</sup> جهت محاسبه‌ی نمایه‌ای لیاپانف سیستم‌های خودگردان به طور مختصر بیان خواهد شد. با استفاده از این روش وقوع پدیده‌ی آشوب در یک ماهواره‌ی همراه با چرخ‌های عکس‌العملی که تحت تاثیر گشتاورهای اغتشاشی قرار گرفته است بررسی خواهد شد. برای این منظور از آنجا که معادلات دینامیکی ماهواره، نشان دهنده‌ی یک سیستم غیرخودگردان است، با در نظر گرفتن زمان  $t$  به عنوان یک متغیر حالت جدید، سیستم را به فرم خودگردان تبدیل می‌کنیم تا بتوانیم از الگوریتم  $QR$  بیان شده برای محاسبه‌ی بزرگترین نمایه‌ای لیاپانف استفاده کنیم. پس از آن با تبدیل معادلات حالت سیستم به فرم کانوئیکال کنترل کننده‌ی مد لغزشی بازگشت به عقب مناسب جهت کنترل وضعیت سه محوره‌ی ماهواره در حالت آشوبی طراحی می‌گردد. سپس پایداری سیستم حلقه‌بسته و مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاشات بر اساس تئوری لیاپانف اثبات می‌شود. همچنین موقیت کنترل کننده‌ی ارائه شده در حذف پدیده‌ی آشوب در سیستم کنترل شده با استفاده از روش ملینیکف و نمایه‌ای لیاپانف مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

ساختم این مقاله به این صورت است: معادلات ماهواره به همراه اغتشاشات در بخش ۲ توصیف می‌گردد. در بخش ۳ با استفاده از روش نمایه‌ای لیاپانف آشوبی بودن این سیستم نشان داده می‌شود. در بخش ۴ کنترل کننده‌ای برای پایدارسازی سیستم طراحی می‌گردد و آنالیز پایداری آن اثبات می‌شود. در بخش ۵ از روش ملینیکف برای نشان دادن موقیت کنترل کننده‌ی طراحی شده در خارج کردن سیستم از ناحیه‌ی آشوبناک استفاده می‌شود. در بخش ۶ و ۷ نیز به ترتیب نتایج شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری بیان می‌شوند.

## ۲- توصیف معادلات سیستم

### ۲-۱- معادلات سینماتیکی و دینامیکی

رابطه‌ی بین سرعت زاویه‌ای و زوایای وضعیت در مختصات اینرسی برای ترتیب چرخش  $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$  به طوری که  $\phi$ ،  $\theta$  و  $\psi$  به ترتیب زوایای چرخش حول محورهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  در دستگاه بدنی باشند، با استفاده از معادلات سینماتیکی زیر بیان می‌شود:

[۱۵]

$$\omega = A^{-1}(\theta)\dot{\theta} \quad (1)$$

<sup>۱</sup> Recursive proportional feedback

<sup>۲</sup> Time delay feedback

<sup>۳</sup> QR-decomposition

که  $\omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$  بودار سرعت زاویه‌ای،  $\Theta = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$  بودار زوایای وضعیت و  $A^{-1}(\Theta)$  به صورت زیر می‌باشد:

$$A^{-1}(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & \cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

چرخ‌های عکس العملی یکی از محرک‌های مورد استفاده در سیستم کنترل وضعیت ماهواره می‌باشند که توزیع اندازه‌ی حرکت در درون ماهواره را تغییر می‌دهند، بدون آنکه در اندازه‌ی حرکت اینرسی تمام سیستم تغییری صورت گیرد. معادلات دینامیکی ماهواره‌ای که سه چرخ عکس العملی بر روی محورهای بدنی آن قرار گرفته‌اند، با استفاده از روابط زیر که به معادلات اویلر معروف است، بیان می‌شود [۱۶]:

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} = (I_y - I_z)\omega_y\omega_z - \omega_y h_z + \omega_z h_y + T_{dx} + T_{cx} \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} = (I_z - I_x)\omega_x\omega_z - \omega_z h_x + \omega_x h_z + T_{dy} + T_{cy} \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} = (I_x - I_y)\omega_x\omega_y - \omega_x h_y + \omega_y h_x + T_{dz} + T_{cz} \end{cases} \quad (3)$$

که  $I_x$ ،  $I_y$  و  $I_z$  ممان‌های اصلی اینرسی (به همراه چرخ‌ها)،  $h_x$ ،  $h_y$  و  $h_z$  درایه‌های بردار اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای چرخهای عکس العملی،  $T_{dx}$ ،  $T_{dy}$  و  $T_{dz}$  گشتاورهای اغتشاشی خارجی و  $T_{cy}$ ،  $T_{cx}$  و  $T_{cz}$  گشتاورهای کنترلی می‌باشد. مدل ساده‌ای از این ماهواره که چرخ‌های عکسی العملی بر روی محورهای بدنی آن قرار گرفته، در شکل ۱ نشان داده شده است.

## ۲-۲- گشتاورهای اغتشاشی

مطابق با [۱۷] گشتاورهای اغتشاشی خارجی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

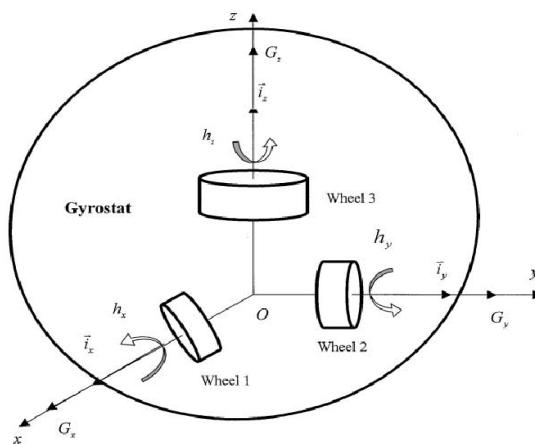
$$\begin{cases} T_{dx} = \varepsilon(\mu_{xx}\omega_x + \mu_{xy}\omega_y + \mu_{xz}\omega_z + \delta_x \sin(\Omega t)) \\ T_{dy} = \varepsilon(\mu_{yx}\omega_x + \mu_{yy}\omega_y + \mu_{yz}\omega_z + \delta_y \sin(\Omega t)) \\ T_{dz} = \varepsilon(\mu_{zx}\omega_x + \mu_{zy}\omega_y + \mu_{zz}\omega_z + \delta_z \sin(\Omega t)) \end{cases} \quad (4)$$

که  $\mu_{ij}$  ثابت‌های میرایی،  $\delta_i$  و  $\Omega$  دامنه و فرکانس گشتاور متناوب و  $\varepsilon$  پارامتر عددی مورد استفاده در روش ملینیکف است که مطابق با این روش در محدوده‌ی [۰ ۱] در نظر گرفته می‌شود. سیگنال متناوب گشتاورهای اغتشاشی ناشی از اغتشاش‌های محیطی مانند تشعشعات خورشیدی است و سایر گشتاورها که به صورت فیدبکی از حالت‌های سیستم نشان داده شده است به وسیله‌ی تجهیزات داخل ماهواره تولید شود. در [۱۷] با استفاده از روش ملینیکف ثابت شده است که این گشتاورهای اغتشاشی در محدوده‌ای از پارامترها باعث آشوبی شدن سیستم ماهواره می‌شوند.

## ۳- محاسبه‌ی نماهای لیپانف

نماهای لیپانف میانگین نرخهای نمایی برای واگرایی و همگرایی مسیرهای حالت نزدیک به هم در فضای فاز هستند که به عنوان معیاری برای تشخیص حرکتهای آشوبناک شناخته می‌شوند. روش‌های متفاوتی برای محاسبه نماهای لیپانف بر اساس معادلات دینامیکی و سری‌های زمانی ارائه شده است [۱۸، ۱۹]. یکی از این روش‌ها محاسبه‌ی نماهای لیپانف بر اساس روش تجزیه QR

برای سیستم‌های پیوسته با دینامیک مشخص می‌باشد [۲۰]. به طور کلی این روش شامل گام‌های زیر می‌باشد:



شکل ۱: مدل ساده‌ای از یک ماهواره با سه چرخ عکس‌العملی قرار گرفته بر روی محورهای بدنی [۱۷]

۱) سیستم به صورت یک سیستم پیوسته‌ی خودگردان با رابطه‌ی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{x}(t) = F(x) \quad (5)$$

۲) ماتریس ژاکوبین سیستم در سراسر مسیر محاسبه می‌گردد:

$$J(x_i) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \Big|_{x_i} \quad (6)$$

که  $x_i$  مقدار حالت‌های سیستم در پله‌ی زمانی  $\Delta t$  را بیان می‌کند.

۳) ماتریس زیر که به ماتریس نگاشت مماسی<sup>۱</sup> معروف است، تشکیل می‌شود:

$$J_i = I + J(x_i) * dt \quad (7)$$

که  $I$  یک ماتریس واحد و  $dt$  زمان نمونه برداری می‌باشد.

۴) ماتریس متعامد  $Q_0$  طوری فرض می‌گردد که  $Q_0 \cdot Q_0^T = I$  باشد.

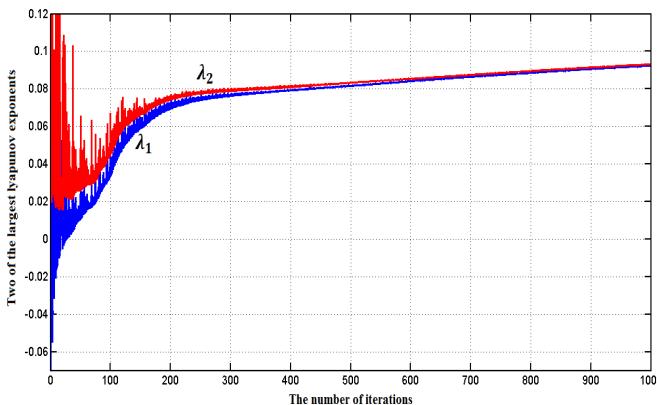
۵) با استفاده از ماتریس  $J_i$  محاسبه شده در مرحله‌ی ۳، ماتریس  $Z_{n+1} = J_n \cdot Q_n$  برای ...  $n = 0, 1, \dots$  تشکیل می‌شود. سپس ماتریس  $Z_{n+1}$  بدست آمده، با استفاده از روش تجزیه  $QR$  به صورت  $Z_{n+1} = Q_{n+1} \cdot R_{n+1}$  در می‌آید که  $Q_{n+1}$  ماتریسی متعامد و  $R_{n+1}$  یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت است.

۶) در مرحله‌ی آخر نیز طیف نمایهای لیپانف طبق رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

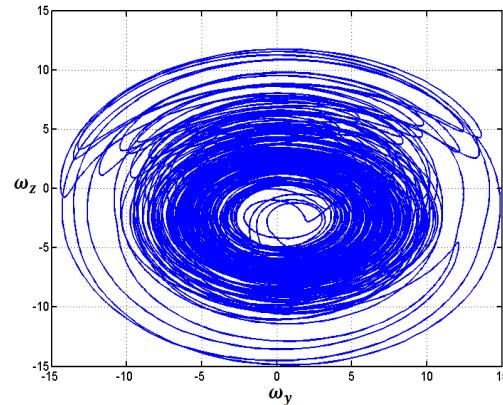
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\text{diag}(R_n \cdot R_{n-1} \dots R_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\text{diag}(R_i)) \quad (8)$$

<sup>1</sup> Tangent map matrix

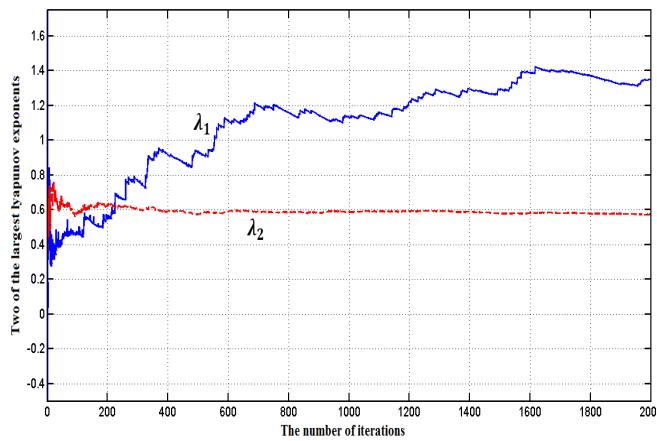
که  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  نماهای لیپانف سیستم هستند که برای هر سیستم به تعداد حالت‌های آن می‌باشد. همچنین  $\text{diag}(R_i)$  درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $R_i$  را بیان می‌کنند.



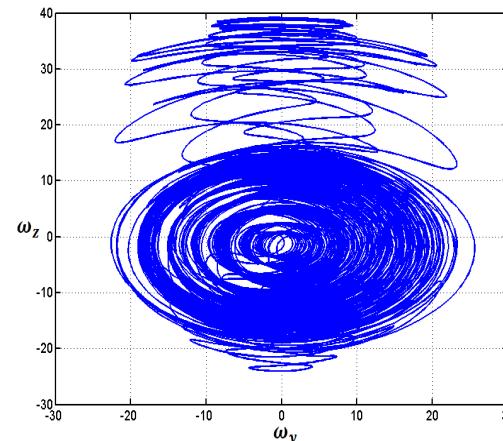
آ. بزرگترین نماهای لیپانف سیستم به ازای  $\epsilon = 0.05$



ب. پرتوهای فاز  $(\omega_y - \omega_z)$  به ازای  $\epsilon = 0.05$



پ. بزرگترین نماهای لیپانف سیستم به ازای  $\epsilon = 0.5$



ت. پرتوهای فاز  $(\omega_y - \omega_z)$  به ازای  $\epsilon = 0.5$

شکل ۲. بزرگترین نماهای لیپانف و پرتوهای فاز  $(\omega_y - \omega_z)$  به ازای مقادیر مختلف  $\epsilon$

همانطور که در بخش ۲.۲ گفته شد، در [۱۷] با استفاده از روش ملنیکف اثبات گردید که سیستم ماهواره‌ی توصیف شده به همراه اغتشاشهای معرفی شده در رابطه (۴) دارای حرکات آشوبی می‌باشد. در اینجا از نماهای لیپانف برای نشان دادن آشوبی بودن سیستم استفاده می‌کنیم. اما از آنجایی که الگوریتم QR شرح داده شده برای سیستم‌های خودگردان تعریف شده است، زمان  $t$  در رابطه (۳) را به عنوان یک متغیر حالت جدید در نظر می‌گیریم تا با استفاده از این افزایش متغیرهای حالت، سیستم به یک سیستم خودگردان هفت بعدی تبدیل می‌شود و بتوانیم از روش QR بیان شده استفاده کنیم. آنگاه مطابق با روش ذکر شده نماهای لیپانف سیستم بدست خواهد آمد. در شکل ۲، دو تا از بزرگترین نماهای لیپانف سیستم در ۱۰۰۰ تکرار اول و با پله‌ی زمانی ۱۰٪ و همچنین پرتوهای فاز  $\omega_z - \omega_y$  برای مقادیر مختلف  $\epsilon$  به ازای شرایط اولیه و پارامترهای معرفی شده در جدول ۲ نشان داده شده است. این شکل‌ها بیان می‌کنند که به ازای  $1 < \epsilon < 0$  سیستم دو نمای لیپانف مثبت دارد که نشان دهنده‌ی سیستمی فوق آشوبناک است. همچنین مطابق با این شکل‌ها هر چه میزان  $\epsilon$  بیشتر شود، نماهای لیپانف سیستم بزرگتر می‌شود.

#### ۴- طراحی کنترل کننده مد لغزشی بازگشت به عقب

##### ۴-۱- تبدیل معادلات حالت به فرم کانوئیکال

برای آنکه بتوانیم طراحی کنترل کننده را آسانتر انجام دهیم، معادلات حالت سیستم را به صورت کانوئیکال در می‌آوریم. برای این کار با ترکیب رابطه‌های (۱)، (۳) و (۴) داریم:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = A(\theta)\omega \\ \dot{\omega} = B^{-1}(f(\omega_x, \omega_y, \omega_z) + \varepsilon\mu\omega + \varepsilon\delta\sin(\Omega t) + T_c) \end{cases} \quad (۹)$$

که آنکه ماتریس میرایی و  $B$  ماتریس ممان اینترسی به صورت زیر می‌باشد:

$$f = \begin{bmatrix} (I_y - I_z)\omega_y\omega_z - h_z\omega_y + h_y\omega_z \\ (I_z - I_x)\omega_x\omega_z - h_x\omega_z + h_z\omega_x \\ (I_x - I_y)\omega_x\omega_y - h_y\omega_x + h_x\omega_y \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

$$\delta = [\delta_x \quad \delta_y \quad \delta_z]^T \quad B = diag(I_x, I_y, I_z)$$

با فرض  $\theta = X_2 = A(\theta)\omega$  و  $X_1 = A(\theta)\omega$  معادلات حالت (۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = \dot{A}\omega + A\dot{\omega} = \dot{A}A^{-1}X_2 + AB^{-1}(f + \mu X_2 + \delta \sin(\Omega t) + T_c) \end{cases} \quad (۱۱)$$

#### ۴-۲- طراحی قانون کنترلی

در این مرحله قانون کنترلی برای پایداری سیستم در حضور اغتشاشات طراحی می‌شود. لذا از آنجایی که در عمل اطلاعاتی در مورد دینامیک اغتشاشات نداریم، می‌توانیم آن را به صورت  $|AB^{-1}T_d| \leq D$  در نظر بگیریم. پس رابطه‌ی (۱۱) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = \dot{A}A^{-1}X_2 + AB^{-1}f + D + AB^{-1}T_c \end{cases} \quad (۱۲)$$

پروسه‌ی طراحی کنترل کننده مد لغزشی بازگشت به عقب به صورت زیر می‌باشد:

**گام اول:** برای مسئله‌ی ردیابی زوایای وضعیت، بردار خطای ردیابی به صورت  $Z_1 = X_1 - X_{1d}$  تعریف می‌شود که در آن  $X_{1d}$  مقدار مطلوب زوایای وضعیت می‌باشد. اولین تابع لیپانف به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V_1 = \frac{1}{2}Z_1^T Z_1 \quad (۱۳)$$

بر طبق تکنیک طراحی بازگشت به عقب، عامل پایدار ساز  $Z_1 = cZ_1 - \alpha_1$  تعریف می‌شود که یک پارامتر مثبت است. با استفاده از این عامل پایدار ساز، بردار دوم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_2 = \dot{Z}_1 + \alpha_1 = \dot{X}_1 + \alpha_1 \quad (14)$$

آن‌گاه مشتق اولینتابع لیپانف به صورت زیر نتیجه گرفته می‌شود:

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2}\dot{Z}_1^T Z_1 + \frac{1}{2}Z_1^T \dot{Z}_1 = Z_1^T \dot{Z}_1 = Z_1^T (Z_2 - \alpha_1) = Z_1^T (Z_2 - cZ_1) = -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 \quad (15)$$

**گام دوم:** با استفاده از متغیرهای جدید تعریف شده، معادلات دینامیکی رابطه‌ی (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \dot{X}_1 \\ \dot{Z}_2 = \dot{X}_2 + \dot{\alpha}_1 = \dot{A}A^{-1}X_2 + AB^{-1}f + D + \dot{\alpha}_1 + AB^{-1}T_c \end{cases} \quad (16)$$

سطح لغزشی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$S = kZ_1 + Z_2 \Rightarrow \dot{S} = k\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = k(Z_2 - \alpha_1) + \dot{Z}_2 \quad (17)$$

جایی که  $k$  یک پارامتر مثبت می‌باشد. تابع لیپانف دوم به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$V_2 = \frac{1}{2}Z_1^T Z_1 + \frac{1}{2}S^T S \quad (18)$$

مشتق این تابع لیپانف می‌تواند به صورت زیر تعیین شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= Z_1^T \dot{Z}_1 + S^T \dot{S} = -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 + S^T (k(Z_2 - \alpha_1) + \dot{Z}_2) \\ &= -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 + S^T (k(Z_2 - \alpha_1) + \dot{A}A^{-1}X_2 + AB^{-1}f + D + \dot{\alpha}_1 + AB^{-1}T_c) \end{aligned} \quad (19)$$

قانون کنترلی سطح لغزشی بازگشت به عقبی که تابع لیپانف  $\dot{V}_2$  را پایدار می‌کند، برابر است با:

$$T_c = BA^{-1} \left( -k(Z_2 - \alpha_1) - \dot{A}A^{-1}X_2 - AB^{-1}f - \dot{\alpha}_1 - h(S + \beta sign(S)) \right) \quad (20)$$

جایی که  $\beta$  یک پارامتر مثبت می‌باشد و داریم:

$$sign(S) = \begin{cases} 1 & \text{for } S > 0 \\ 0 & \text{for } S = 0 \\ -1 & \text{for } S < 0 \end{cases} \quad (21)$$

لذا می‌توانیم قضیه‌ی زیر را بیان کنیم:

**قضیه ۱:** برای سیستم شرح داده شده با معادله‌ی رابطه‌ی (۱۱)، کنترل کننده‌ی پیشنهاد شده‌ی معادله‌ی (۲۰) همگرایی مجانبی به مقادیر مطلوب زوایای وضعیت در حضور اختشاشات را بیان می‌کند، یعنی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_1, Z_2 = 0 \quad (22)$$

**اثبات:** پس از جایگذاری قانون کنترلی رابطه‌ی (۲۰) در معادله‌ی (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 + S^T (D - hS - h\beta sign(S)) \\ &= -cZ_1^T Z_1 + Z_1^T Z_2 - hS^T S + S^T (D - h\beta sign(S)) \end{aligned} \quad (23)$$

برای اثبات پایداری لازم است تا ماتریس انتقالی  $Q$  را به عنوان یک ماتریس متقاضان معین مثبت به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} c + hk^2 & hk - \frac{1}{2} \\ hk - \frac{1}{2} & h \end{bmatrix} \quad (24)$$

آنگاه داریم:

$$Z^T Q Z = [Z_1 \ Z_2] \begin{bmatrix} c + hk^2 & hk - \frac{1}{2} \\ hk - \frac{1}{2} & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = cZ_1^T Z_1 - Z_1^T Z_2 + hS^T S \quad (25)$$

که  $Z = [Z_1 \ Z_2]^T$  می‌باشد. در ادامه‌ی اثبات پایداری از رابطه‌ی (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -(cZ_1^T Z_1 - Z_1^T Z_2 + hS^T S) + S^T (D - h\beta sign(S)) \\ &= -Z^T Q Z + S^T (D - h\beta sign(S)) \end{aligned} \quad (26)$$

برای ماتریس  $Q$  داریم:

$$|Q| = \begin{vmatrix} c + hk^2 & hk - \frac{1}{2} \\ hk - \frac{1}{2} & h \end{vmatrix} = h(c + k) - \frac{1}{4} > 0 \quad (27)$$

اگر پارامترهای  $h$ ،  $c$  و  $k$  به گونه‌ای انتخاب شوند که شرط  $|Q| = h(c + k) - \frac{1}{4} > 0$  برقرار باشد و  $h\beta$  نیز به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد که شرط  $h\beta \geq D$  برقرار گردد، آنگاه طبق رابطه‌ی زیر ثابت می‌شود که  $\dot{V}_2 \leq 0$  است:

$$S^T (D - h\beta sign(S)) = \begin{cases} S^T (D - h\beta) \leq 0 & S > 0 \\ S^T (D + h\beta) \leq 0 & S < 0 \end{cases} \quad (28)$$

لذا  $Z_1$  و  $Z_2$  طبق [۲۱] به صفر همگرا خواهند شد. پایداری کنترل کننده‌ی مد لغزشی بازگشت به عقب تضمین می‌گردد و قضیه ۱ ثابت می‌شود.

**تذکر:** یکی از مشکلات کنترل کننده‌ی مد لغزشی، پدیده‌ی چترینگک می‌باشد که ناشی از تابع  $Sign$  است. لذا در شیوه سازی ها برای جلوگیری از این پدیده یک کنترل کننده فازی برای تقریب تابع  $Sign$  مطابق آنچه در [۲۲] آمده، طراحی می‌شود.

$$u_{fuzzy} = FC(S, \dot{S}) \quad (29)$$

در نتیجه ورودی کنترلی رابطه‌ی (۲۰) به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$T_c = BA^{-1} \left( -k(Z_2 - \alpha_1) - \dot{A}A^{-1}X_2 - AB^{-1}f - \dot{\alpha}_1 - h(S + \beta u_{fuzz}) \right) \quad (30)$$

## ۵-آنالیز ملنیکف برای اثبات موفقیت روش کنترل پیشه‌هادی برای جلوگیری از حرکت آشوبناک

روش ملنیکف یک ابزار ریاضی می‌باشد که به طور دقیق و تحلیلی تقاطع مسیر کمتر کم دارای هیتوکلینیک را جستجو می‌کند و می‌تواند آستانه رفتارهای نامنظم را پیش‌بینی کند. برای جزئیات بیشتر در مورد تئوری ملنیکف می‌توانید مرجع [۲۳] را دنبال کنید. در این بخش می‌خواهیم با استفاده از این روش ثابت کنیم که کنترل کننده‌ی طراحی شده توانسته است سیستم را از ناحیه‌ی آشوبی خارج نماید. هدف از طرح این موضوع بیان این ایده است که امکان دارد بتوان در کارهای آینده از روش ملنیکف برای طراحی کنترل کننده‌ای استفاده کرد که یک سیستم آشوبی را از ناحیه‌ی آشوبناک خارج نماید.

برای استفاده از روش ملنیکف باید مدل سیستم به صورت زیر در آید:

$$\dot{x}(t) = f(x) + \varepsilon g(x, \tau) \quad (31)$$

جایی که  $g$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $T$  در  $\tau$ ،  $f$  میدان برداری و  $\varepsilon g(x, \tau)$  یک انحراف کوچک از سیستم مورد نظر می‌باشد. بر طبق نتایج [۲۴] تابع ملنیکف برای سیستم‌های بالاتر از مرتبه‌ی از دو به صورت زیر می‌باشد:

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H[q_0(\tau)] \{f[q_0(\tau)] + g[q_0(\tau), \tau + \tau_0]\} d\tau \quad (32)$$

جایی که  $\nabla H$  گرادیان با توجه به تابع همیلتونین،  $f$  بخش منحرف نشده و  $g$  بخش منحرف شده از معادلات سیستم و  $q_0(\tau)$  حل معادلات سیستم منحرف نشده ( $0 = \varepsilon$ ) می‌باشد.

برای سیستم ماهواره‌ی توصیف شده، تابع همیلتونی که در واقع انرژی جنبشی سیستم منحرف نشده را بیان می‌کند به صورت  $H = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$  است که گرادیان آن به صورت  $\nabla H = \{I_x \omega_x, I_y \omega_y, I_z \omega_z\}$  بدست می‌آید.

برای بحث در مورد نتایج تابع ملنیکف لازم است که قضیه‌ی زیر بیان شود:

**قضیه ۲** [۲۵]: اگر تابع ملنیکف  $M(\tau_0)$  تعریف شده با معادله‌ی  $M(\tau_0) \neq 0$  باشد، یعنی برای همه‌ی  $\tau_0$  ها شرط‌های  $> 0$  و  $< 0$  برقرار باشد، آن‌گاه برای همه‌ی  $\varepsilon \neq 0$  هیچ نقطه‌ی تقاطعی بین خمینه‌های پایدار  $W^s(x_\varepsilon)$  و ناپایدار  $W^u(x_\varepsilon)$  نیسته‌ی تعادل سیستم (۳۱) می‌باشد) وجود ندارد و داریم  $W^s(x_\varepsilon) \cap W^u(x_\varepsilon) = \emptyset$ . در این صورت سیستم هیچگونه حرکت آشوبناکی نخواهد داشت.

همانطور که پیش از این گفته شد برای استفاده از روش ملنیکف ابتدا باید معادلات سیستم را به شکل رابطه‌ی (۳۱) در آوریم. لذا با قرار دادن  $T_{dx}$ ,  $T_{dy}$ ,  $T_{dz}$  و  $T_{cx}$  از رابطه‌ی (۴) و  $T_{cy}$  از رابطه‌ی (۲۰) در معادله‌ی (۲۰) و پس از پاره‌ای از محاسبات معادلات حالت سیستم به صورت زیر در می‌آید:

<sup>۱</sup> Manifold

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = -\frac{(k+c+h)}{I_x}\omega_x + \frac{\varepsilon}{I_x}(\mu_{xx}\omega_x + \mu_{xy}\omega_y + \mu_{xz}\omega_z + \delta_x \sin(\Omega t)) + h.o.t \\ \dot{\omega}_y = -\frac{(k+c+h)}{I_y}\omega_y + \frac{\varepsilon}{I_y}(\mu_{yx}\omega_x + \mu_{yy}\omega_y + \mu_{yz}\omega_z + \delta_y \sin(\Omega t)) + h.o.t \\ \dot{\omega}_z = -\frac{(k+c+h)}{I_z}\omega_z + \frac{\varepsilon}{I_z}(\mu_{zx}\omega_x + \mu_{zy}\omega_y + \mu_{zz}\omega_z + \delta_z \sin(\Omega t)) + h.o.t \end{cases} \quad (۳۳)$$

که  $h.o.t$  بیان کننده‌ی ترم‌های مرتبه‌ی بالا می‌باشد که بدون از دست دادن کلیت مسئله‌ی می‌توانیم از آنها صرف نظر کنیم. با حل این مجموعه معادلات برای  $\varepsilon = 0$  داریم:

$$\omega_x = \omega_x(0)e^{-\frac{p}{I_x}t} \quad \omega_y = \omega_y(0)e^{-\frac{p}{I_y}t} \quad \omega_z = \omega_z(0)e^{-\frac{p}{I_z}t} \quad (۳۴)$$

جایی که  $p = k + c + h$  و  $\omega_x(0), \omega_y(0), \omega_z(0)$  شرایط اولیه‌ی سرعت‌های زاویه‌ای را بیان می‌کنند. در این مرحله می‌توانیم انتگرال ملینیکف (۳۲) را برای این سیستم گسترش دهیم:

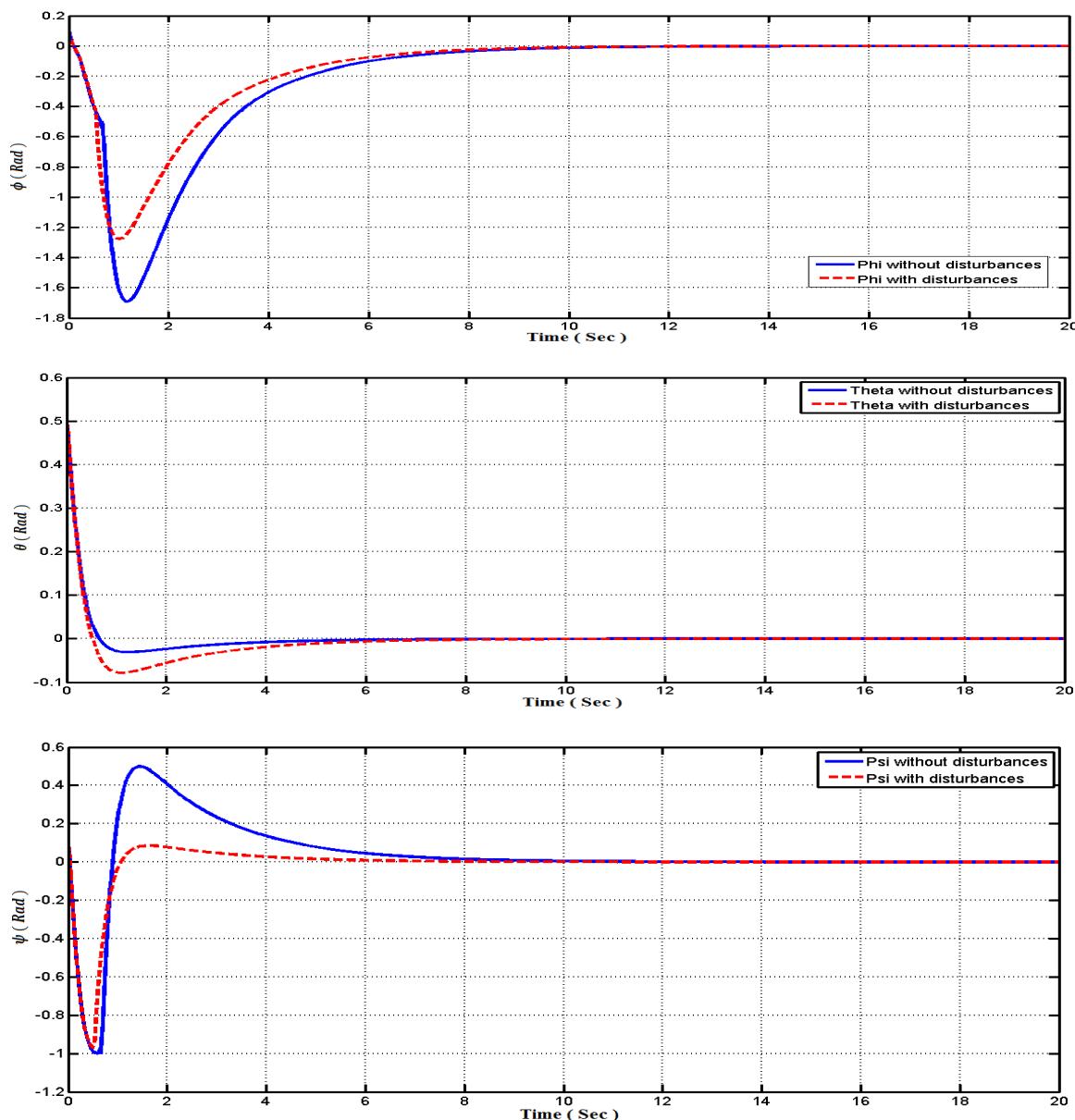
$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-p\omega_x^2 + \mu_{xx}\omega_x^2 + \mu_{xy}\omega_x\omega_y + \mu_{xz}\omega_x\omega_z + \delta_x\omega_x \sin(\Omega(\tau + \tau_0))) d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} (-p\omega_y^2 + \mu_{yx}\omega_x\omega_y + \mu_{yy}\omega_y^2 + \mu_{yz}\omega_y\omega_z + \delta_y\omega_y \sin(\Omega(\tau + \tau_0))) d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} (-p\omega_z^2 + \mu_{zx}\omega_x\omega_z + \mu_{zy}\omega_y\omega_z + \mu_{zz}\omega_z^2 + \delta_z\omega_z \sin(\Omega(\tau + \tau_0))) d\tau \end{aligned} \quad (۳۵)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۴) در معادله‌ی (۳۵) داریم:

$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= (\mu_{xx} - p)\omega_x^2(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2p}{I_x}t} d\tau + (\mu_{xy} + \mu_{yx})\omega_x(0)\omega_y(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\left(\frac{I_y+I_x}{I_x I_y}\right)t} d\tau \\ &+ (\mu_{yy} - p)\omega_y^2(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2p}{I_y}t} d\tau + (\mu_{xz} + \mu_{zx})\omega_x(0)\omega_z(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\left(\frac{I_z+I_x}{I_x I_z}\right)t} d\tau \\ &+ (\mu_{zz} - p)\omega_z^2(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2p}{I_z}t} d\tau + (\mu_{yz} + \mu_{zy})\omega_y(0)\omega_z(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\left(\frac{I_y+I_z}{I_z I_y}\right)t} d\tau \\ &+ \delta_x\omega_x(0) \cos(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_x}t} \sin(\Omega t) d\tau + \delta_x\omega_x(0) \sin(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_x}t} \cos(\Omega t) d\tau \\ &+ \delta_y\omega_y(0) \cos(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_y}t} \sin(\Omega t) d\tau + \delta_y\omega_y(0) \sin(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_y}t} \cos(\Omega t) d\tau \\ &+ \delta_z\omega_z(0) \cos(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_z}t} \sin(\Omega t) d\tau + \delta_z\omega_z(0) \sin(\Omega\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{I_z}t} \cos(\Omega t) d\tau = \infty \end{aligned} \quad (۳۶)$$

همانطور که مشاهده می‌شود حاصل این تابع به ازای هر فرکانس و شرایط اولیه‌ای بی‌نهایت می‌باشد که برطبق قضیه ۲ به معنی  $W^s(x_\varepsilon) \cap W^u(x_\varepsilon) = \emptyset$  است که بیان کننده عدم وجود تقاطع بین خمینه‌های پایدار و ناپایدار می‌باشد. در واقع این نتیجه بیان کننده‌ی این موضوع می‌باشد که کنترل کننده‌ی طراحی شده توانسته است سیستم را از ناحیه‌ی آشوبی خارج کند.

از طرفی نمایه‌ای لیپانف برای سیستم حلقه بسته بر اساس الگوریتم QR محاسبه شده و در جدول ۱ آمده است. همانطور که از این جدول نیز قابل استخراج است، تمام نمایه‌ای لیپانف برای سیستم کنترل شده منفی می‌باشد که بار دیگر موفقیت کنترل کننده در خارج کردن سیستم از ناحیه‌ی آشوبی را نشان می‌دهد.



شکل ۳. رفتار زوایای وضعیت  $\phi$ ،  $\theta$  و  $\psi$  بدون حضور اغتشاشات و در حضور اغتشاشات

جدول ۱. نمایانگی برای سیستم حلقه بسته

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$
سیستم حلقه بسته	-0.388	-0.515	-0.89	-3.79	-4.086	-4.396	0

## ۶- نتایج شبیه سازی

در این بخش می خواهیم نتایج حاصل از شبیه سازی کنترل کننده طراحی شده برای کنترل وضعیت ماهواره را مشاهده کنیم. برای حل معادلات دیفرانسیل مورد نظر از روش Runge-Kutta مرتبه ۴ با پله های زمانی ۰/۰۱ استفاده کردیم. شرایط اولیه و پارامترهای فیزیکی به شرح ذیل می باشد:

شرایط اولیه:

$$\theta(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \omega(0) = \begin{bmatrix} -1.7121 \\ -1.6877 \\ -4.7917 \end{bmatrix}$$

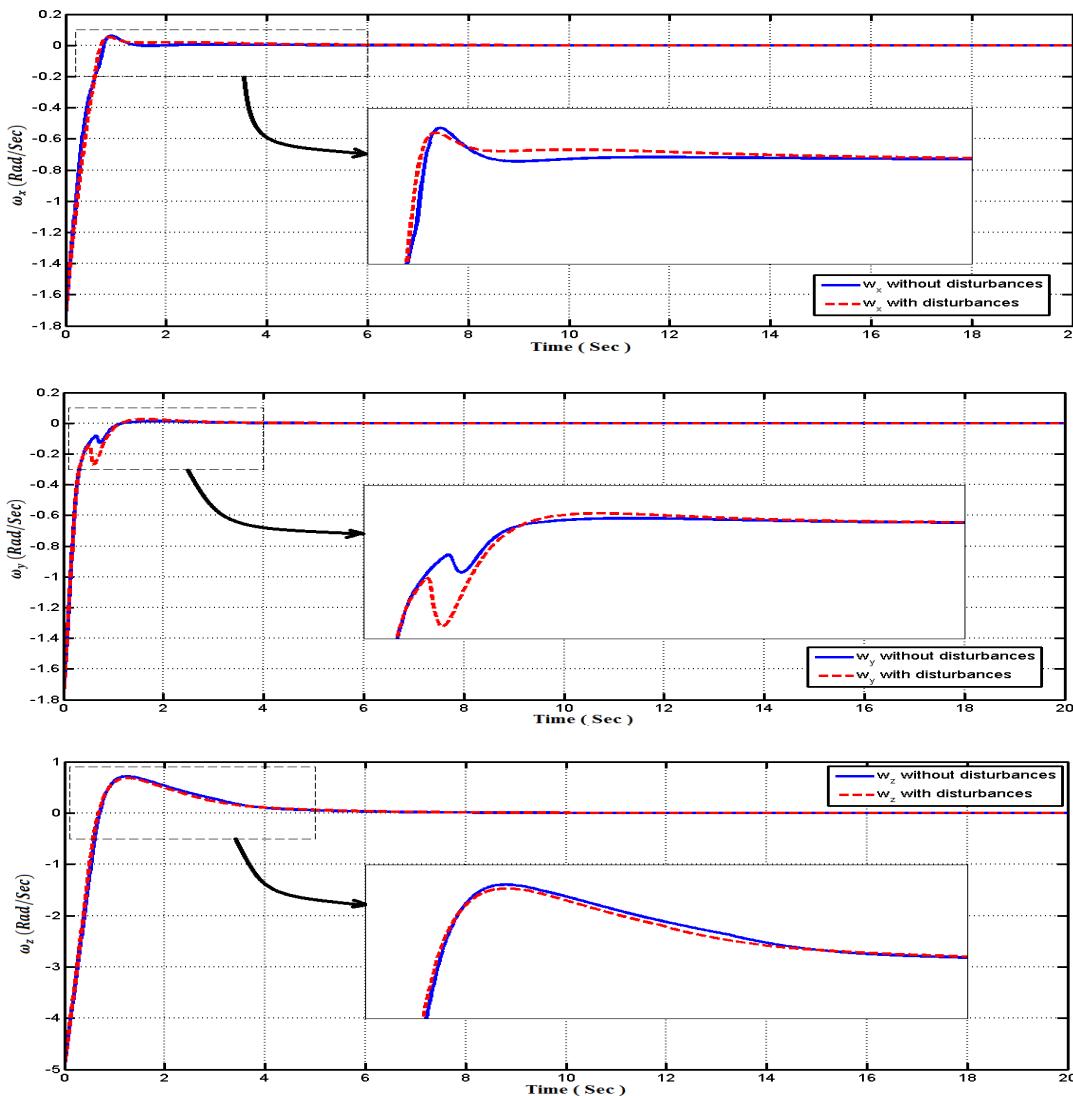
پارامترهای فیزیکی:

$$I_x = 12 \text{ (kg m}^2\text{)} \quad I_y = 9.5 \text{ (kg m}^2\text{)} \quad I_z = 6 \text{ (kg m}^2\text{)} \quad \Omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$h_x = 5.4768 \text{ (N m s)} \quad h_y = 1.1789 \text{ (N m s)} \quad h_z = -13.4327 \text{ (N m s)}$$

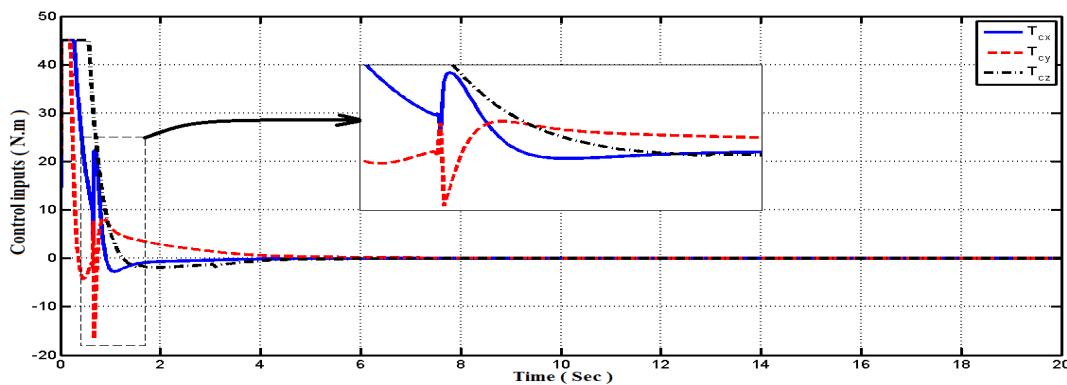
$$\mu = \begin{bmatrix} -0.519 & -10.635 & 0.6899 \\ 10.125 & -0.856 & -1.780 \\ 2.567 & 1.859 & -0.956 \end{bmatrix} \text{ (N m s)} \quad \delta = \begin{bmatrix} -659.8632 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix} \text{ (N m)}$$

در مورد ماهواره هایی که به روش پایدار سازی سه محوره کنترل می شوند در حالت پایدار نامی، دستگاه مختصات بدن و دستگاه مختصات مدار با هم منطبق شوند. لذا مقدار مطلوب زوایای وضعیت برای کنترل وضعیت سه محوره  $X_{1d} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$  می باشد. پارامترهای طراحی  $c = 2$ ,  $k = 1.8$ ,  $c = 0.6$  و  $h = 0.9$  را به روش سعی و خطا به گونه ای انتخاب می کنیم که شرطهای  $0 < h(c+k) - \frac{1}{4}h\beta \leq D$  را برقرار کند. در شکل های ۳ و ۴ پاسخ زمانی زوایای وضعیت و سرعت های زاویه ای سیستم حلقه بسته بدون گشتاورهای اغتشاشی (خطوط پیوسته) و همچنین همراه با گشتاورهای اغتشاشی (خطوط گسسته) نشان داده شده است. همانطور که از این شکل ها مشخص است، حالتهای سیستم پس از اعمال کنترل کننده در هر دو حالت رفتار های تقریباً مشابهی دارند و به سرعت به سمت صفر می کنند که نشان دهنده ای توانایی کنترل کننده ای طراحی شده برای حذف اثرات اغتشاش می باشد. شکل ۵ و ۶ نیز عملکرد ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم را به ترتیب در غیاب اغتشاشات و در حضور اغتشاشات نشان می دهد. همانطور که از شکل ۶ مشخص است، ورودی کنترلی به وسیله ای یک محدود کننده با دامنه ای ۰/۵ محدود شده است تا از ضربه ناگهانی با دامنه ای زیاد در لحظات اول جلوگیری شود. همچنین دامنه ای نوسانات موجود در این شکل، تلاش های ورودی کنترلی برای حذف اثرات گشتاورهای اغتشاشی را بیان می کند.

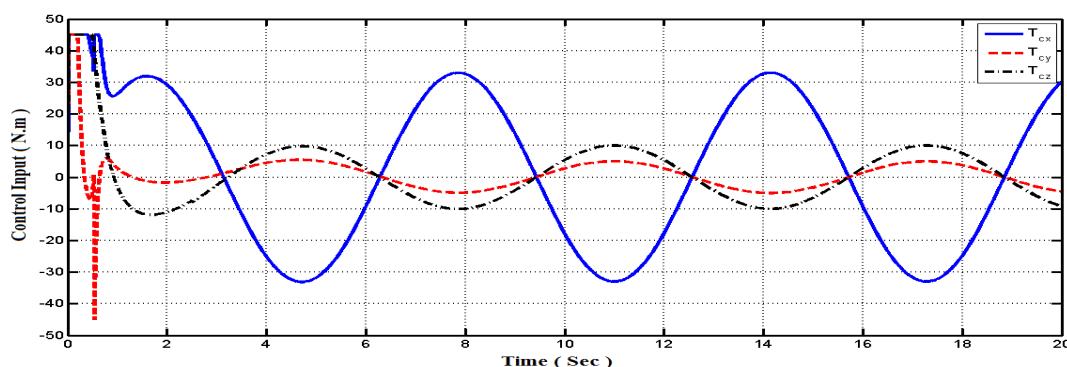
شکل ۴. رفتار زوایای وضعیت  $\omega_x$ ،  $\omega_y$ ،  $\omega_z$  بدون حضور اغتشاشات و در حضور اغتشاشات

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله مسئله‌ی کنترل وضعیت یک ماهواره مورد بررسی قرار گرفت و حرکات آشوبی آن با استفاده از نمایه‌ای لیپانف نشان داده شد. یک کنترل کننده مد لغزشی بازگشت به عقب که پایداری مجانبی کلی سیستم را تضمین می‌کند با استفاده از روش پایداری لیپانف طراحی شد و مقاوم بودن این کنترل کننده در مقابل اغتشاشات اعمالی به ماهواره اثبات گردید. برای جلوگیری از پدیده‌ی چترینگ در کنترل کننده مد لغزشی یک بلوك فازی به نحوی طراحی شد که تابع *Sign* را تقریب بزند. نتایج شیوه سازی نیز کارآبی روش کنترلی پیشنهاد شده و مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاشات اعمال شده را به خوبی نشان می‌دهد. سپس از روش‌های ملنیکف و نمایه‌ای لیپانف علاوه بر روش لیپانف استفاده شد تا نشان داده شود که روش کنترلی توانسته حرکات آشوبی سیستم منحرف شده را به خوبی کنترل و آن را از ناحیه‌ی آشوبناک خارج نماید. نتایج روش ملنیکف نشان می‌دهد که شاید در کارهای آینده بتوان از این روش برای طراحی کنترل کننده‌ای استفاده کرد که بتواند یک سیستم آشوبی را از ناحیه‌ی آشوبناک خارج نماید.



شکل ۵: گشتاور های کنترلی ماهواره  $T_{cz}$ ,  $T_{cy}$ ,  $T_{cx}$  در غیاب اغتشاشات



شکل ۶: گشتاور های کنترلی ماهواره  $T_{cz}$ ,  $T_{cy}$ ,  $T_{cx}$  در حضور اغتشاشات

## مراجع

- [1] M. E. Cohen, D. L. Hudson, and P. C. Deedwania, "Applying continuous chaotic modeling to cardiac signal analysis," *Engineering in Medicine and Biology Magazine, IEEE*, vol. 15, pp. 97-102, 1996.
- [2] B. Basak and S. Parui, "Exploration of bifurcation and chaos in buck converter supplied from a rectifier," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 25, pp. 1556-1564, 2010.
- [3] H. Ren and D. Liu, "Nonlinear feedback control of chaos in permanent magnet synchronous motor," *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol. 53, pp. 45-50, 2006.
- [4] S. Rasoulian, M. Shahrokh, and H. Salarieh, "Control of a Chemical Reactor with Chaotic Dynamics," *Iran. J. Chem. Eng. Vol*, vol. 29, 2010.
- [5] M. Malekzadeh, A. Naghash, and H. Talebi, "A Robust Nonlinear Control Approach for Tip Position Tracking of Flexible Spacecraft," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 2423-2434, 2011.
- [6] B. Xiao, Q. Hu, and Y. Zhang, "Adaptive sliding mode fault tolerant attitude tracking control for flexible spacecraft under actuator saturation," *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol. 20, pp. 1605-1612, 2012.
- [7] P. Guan, X.-J. Liu, and J.-Z. Liu, "Adaptive fuzzy sliding mode control for flexible

- satellite," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 18, pp. 451-459, 6// 2005.
- [8] N. M. Horri, P. Palmer, and M. Roberts, "Gain-Scheduled Inverse Optimal Satellite Attitude Control," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 2437-2457, 2012.
- [9] K. Kemih, A. Kemiha, and M. Ghanes, "Chaotic attitude control of satellite using impulsive control," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 42, pp. 735-744, 2009.
- [10] P. Meehan and S. Asokanthan, "Control of chaotic motion in a spinning spacecraft with a circumferential nutational damper," *Nonlinear Dynamics*, vol. 17, pp. 269-284, 1998.
- [11] P. Meehan and S. Asokanthan, "Control of chaotic instabilities in a spinning spacecraft with dissipation using Lyapunov's method," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 13, pp. 1857-1869, 2002.
- [12] Y. Baozeng and X. Jiafang, "Chaotic attitude maneuvers in spacecraft with a completely liquid-filled cavity," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, pp. 643-656, 2007.
- [13] M. Iñarrea, "Chaotic Pitch Motion of a Magnetic Spacecraft with Viscous Drag in AN Elliptical Polar Orbit," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 21, pp. 1959-1975, 2011.
- [14] M. Iñarrea, "Chaos and its control in the pitch motion of an asymmetric magnetic spacecraft in polar elliptic orbit," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 40, pp. 1637-1652, 2009.
- [15] X. Tong, B. Tabarrok, and F. P. J. Rimrott, "Chaotic motion of an asymmetric gyrostat in the gravitational field," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 30, pp. 191-203, 5// 1995.
- [16] M. H. Kaplan, "Modern spacecraft dynamics and control," *New York, John Wiley and Sons, Inc., 1976. 427 p.*, vol. 1, 1976.
- [17] J. Kuang, S. Tan, K. Arichandran, and A. Leung, "Chaotic dynamics of an asymmetrical gyrostat," *International journal of non-linear mechanics*, vol. 36, pp. 1213-1233, 2001.
- [18] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, "determining lyapounov exponents from a time series," *Physica 16D*, vol. 32, pp. 285-317, 1985.
- [19] K. Geist, U. Parlitz, and W. Lauterborn, "Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents," *Progress of Theoretical Physics*, vol. 83, pp. 875-893, 1990.
- [20] H. F. Von Bremen, F. E. Udwadia, and W. Proskurowski, "An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 101, pp. 1-16, 1997.
- [21] P. A. Ioannou and B. Fidan, *Adaptive control tutorial* vol. 3600: Society for industrial and applied mathematics Philadelphia, PA, 2006.
- [22] H.-T. Yau, "Chaos synchronization of two uncertain chaotic nonlinear gyros using fuzzy sliding mode control," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, pp. 408-418, 2008.

- [23] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* vol. 2: Springer Verlag, 2003.
- [24] P. J. Holmes and J. E. Marsden, "Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups," DTIC Document1981.
- [25] V. K. m. Mel'nikov, "On the stability of a center for time-periodic perturbations," *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, vol. 12, pp. 3-52, 1963.