

طراحی کنترل مدلغزشی ترمینال زمان-ثابت برای ربات با چرخ‌های مکانوم

جواد مولائی^۱، اکبر شرقی^۲ و رضا آقایی طوق^۳

^۱ دانشجوی دکترا، گروه مهندسی هوافضا، دانشکده فنی و مهندسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. Jackmowl@aol.com

^۲ دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران. Akbarsharghi1@gmail.com

^۳ نویسنده مسئول، استادیار، گروه مهندسی هوافضا، دانشکده فنی و مهندسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. Reza_tog@srbiau.ac.ir



دانشگاه صنعتی سهند

DOR:

20.1001.1.23223146.1400.8.2.1.2

نشریه سالانه‌ی غیرخطی «مندی برق»

دوره ۸ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۰

صفحات ۱۹ الی ۳۷

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

چکیده

در این مقاله، قانون کنترلی بر پایه‌ی کنترل مدلغزشی ترمینال، برای ربات چهار چرخ با چرخ‌های مکانوم برای حرکت در یک مسیر از پیش تعیین شده و همگرایی به آن در یک زمان ثابت ارائه شده است. ابتدا با توجه به ساختار ربات مدل دینامیکی آن ارائه می‌گردد، که از یک معادله‌ی غیرخطی درجه دو تبعیت می‌کند. بر پایه‌ی روش کنترل مدلغزشی ترمینال، یک سطح لغزشی غیرخطی که تابعی از بردار خطای وضعیت می‌باشد، تعریف شده و سپس بر پایه‌ی این سطح لغزشی ورودی کنترلی طراحی شده است. با استفاده از قضیه لیاپانوف اثبات شده است که با بکار بردن این ورودی کنترلی، ربات به مسیر از پیش تعیین شده در یک زمان ثابت همگرا می‌گردد. زمان همگرایی به صورت تابعی از ثابت‌های تعریف شده در ورودی کنترلی است. در نهایت شبیه سازی بر پایه‌ی ورودی کنترلی ارائه شده و نتایج حاصل نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی

کنترل مدلغزشی ترمینال،
ربات چهار چرخ،
چرخ مکانوم،
سطح لغزشی،
پایداری زمان ثابت.



Sahand University
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1400.8.2.1.2](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1400.8.2.1.2)

Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering

Vol.8, No.2

Autumn and Winter 2021

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

Design of Fixed-time Terminal Sliding Mode Control for Robot with Mecanum Wheels

J. Mowlae¹, A. Sharghi² and R. Aghaei-Togh³

¹ Department of Aerospace Engineering, Faculty of Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. Email: Jackmowl@aol.com

² Faculty of Electrical and Computer Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran. Email: Akbarsharghi1@gmail.com

³ **Corresponding Author**, Department of Aerospace Engineering, Faculty of Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. Email: Reza_tog@srbiau.ac.ir

ABSTRACT

In this paper, a control Law based on terminal sliding mode control is provided for a mobile robot with four Mecanum wheels to move in a predetermined path and converge into the path in a fixed-time. First, according to the robot structure, dynamic model of the robot is presented. which follows a nonlinear second-order equation. Based on terminal sliding mode control, a nonlinear sliding surface which is a function of position error vector is defined and then the control input is designed based on this sliding surface. Using the Lyapunov theorem, it has been proven that, using this control input, the robot converges to the predetermined path at a fixed time. The convergence time is a function of the constants defined in the control input. Finally, the simulation results are presented based on the control input and the results are shown.

Keywords

Terminal sliding mode control,
four wheels robot,
Mecanum wheels,
sliding surface,
fixed-time stability.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، محبوبیت مطالعه در زمینه‌ی ربات‌های متحرک در محیط‌های عملکردی گوناگون افزایش یافته است. ربات‌های متحرک به دو دسته‌ی ربات با چرخ‌های معمولی و چرخ‌های چندسویه^۱ قابل تقسیم بندی هستند؛ به دلیل مزیت‌هایی همچون مانورپذیری بالا، توانایی چرخش در هر جهت بدون تغییر در راستا و قابلیت حرکت در فضاها محدود، این ربات‌ها در کاربردهای صنعتی و خانگی اعم از صندلی با چرخ‌های چندسویه، لیفتراک و... مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱]. ربات با چرخ‌های مکانوم^۲ یک نوع ربات با چرخ‌های چندسویه است. این نوع ربات‌ها، به عنوان یک سیستم هولونومیک شناخته می‌شوند و دارای سه درجه آزادی در صفحه‌ی افقی هستند [۲]. برخلاف ربات‌ها با چرخ‌های متعارف، ربات‌های مجهز به چرخ‌های مکانوم توانایی بالایی در حرکت در جهت‌های اصلی و فرعی دارند. مدلسازی و کنترل حرکت ربات با چرخ‌های مکانوم توسط محققان زیادی مورد بررسی قرار گرفته است [۳-۵].

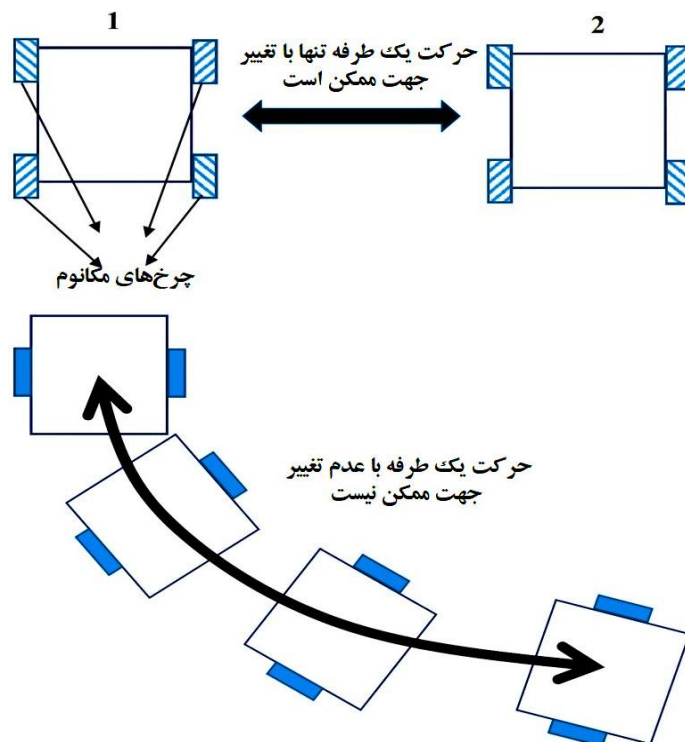
در میان انواع چرخ‌های چندسویه، اثر بخشی بهتر چرخ‌های مکانوم در بدست آوردن حرکت ربات در جهت‌های مختلف نشان داده شده است [۶]. هر چرخ مکانوم از تعدادی غلتک که با زاویه‌ی ۴۵ درجه در پیرامون مرکز چرخ قرار دارند، تشکیل شده است [۷]. در ربات با چرخ‌های متعارف، حرکت یک طرفه تنها با تغییر جهت ممکن است در صورتی که این حرکت در ربات با چرخ‌های مکانوم بدون تغییر جهت انجام می‌پذیرد، این نکته در شکل ۱ نشان داده شده است. تصویری از چرخ مکانوم در شکل ۲ نمایش داده شده است.

مدلسازی دینامیکی و سینماتیکی یک ربات چهار چرخ با چرخ‌های چندسویه در [۹] بررسی شده است. در ربات با چرخ‌های مکانوم، از چهار موتور جداگانه برای هدایت در مسیر مناسب استفاده می‌شود به این دلیل کنترل حرکت این نوع ربات‌ها در حضور نامعینی‌ها با چالش روبرو خواهد بود. در [۱۰]، ربات چهار چرخ با چرخ‌های مکانوم با نام اورانوس ساخته شده است. معادلات سینماتیکی حرکت این ربات استخراج شده و یک الگوریتم کنترلی بازخورد برای آن طراحی صورت گرفته است. در [۱۱]، روش تصحیح موقعیت برای ربات با چرخ‌های مکانوم یا استخراج مدل دینامیکی ربات بررسی شده است. برای ردیابی مسیر دلخواه توسط ربات با چرخ‌های مکانوم، کنترل کننده‌ای بر پایه کنترل تطبیقی در [۱] ایجاد شده است. برای اینکه سیستم در حضور نامعینی‌ها مقاوم باشد، محققان از روش‌های کنترلی غیرخطی مانند کنترل مدلفزشی^۳، شبکه‌های عصبی، کنترل فازی و غیره استفاده می‌کنند.

^۱ Omni-directional Wheels

^۲ Mecanum

^۳ Sliding Mode Control (SMC)



شکل ۱. مقایسه‌ی حرکت ربات با چرخ‌های متعارف و چرخ‌های مکانوم [۸].

از روش SMC می‌توان برای مسئله‌ی ردیابی استفاده نمود. روش ناپویسته‌ی مد لغزشی می‌تواند برای کنترل مقاوم یک سیستم در حضور نامعینی و اغتشاش مورد استفاده قرار گیرد. در این روش کنترلی، توابع سوئیچینگ از سطوح لغزشی تعریف می‌شوند به طوری که وقتی حالت‌های خروجی به سطح لغزشی مورد نظر می‌رسند، توابع سوئیچینگ، حالت‌ها را بر روی سطح نگه می‌دارند و دینامیک‌های مطلوب بدست می‌آید. ویژگی اصلی در SMC عدم حساسیت به اغتشاش خارجی و پاسخ دینامیک سریع است. در [۱۲]، کنترل کننده بر پایه SMC برای ربات با سه چرخ چندسویه با در نظر گرفتن اصطکاک و نامعینی ایجاد شده است. با این حال در این مرجع، اثرات نامعینی ساختار نیافته در نظر گرفته نشده است، این نوع نامعینی در [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مرجع یک شبکه‌ی عصبی بر پایه SMC، برای یک ربات با چرخ‌های چندسویه ایجاد شده است.

بسیاری از سطوح‌های لغزشی در SMC متداول، عموماً به صورت توابع خطی سوئیچینگ ایجاد می‌شود. در میان مباحث SMC، کنترل مد لغزشی ترمینال^۱ [۱۴-۱۶]، به سطوح غیرخطی سوئیچینگ که برای همگرایی سریع یا زمان محدود [۱۷] از نیروی کنترلی زیاد استفاده نمی‌شود، اطلاق می‌گردد. در برخی از موارد TSMC با مسئله‌ی ناکینتی روبه‌رو می‌شود. برای برطرف سازی این مسئله، چندین ورودی کنترلی برای حذف یا اجتناب از ناکینتی ارائه شده است [۱۸-۲۰].

علاوه بر پایداری متداول در SMC، پایداری زمان ثابت^۲ نیز توسط این روش مورد توجه قرار می‌گیرد [۲۱]، که در این نوع پایداری زمان همگرایی به شرایط اولیه وابسته نیست. بررسی روش‌های اثبات پایداری زمان ثابت و بررسی همگرایی آن توسط SMC

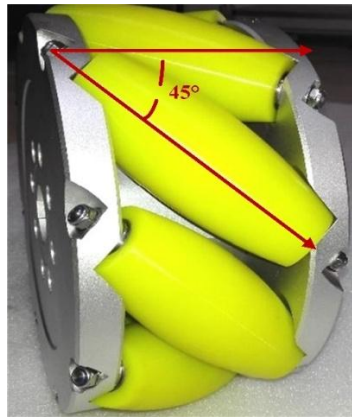
^۱ Terminal Sliding Mode Control (TSMC)

^۲ Fixed-time Stability

در [۲۲] انجام شده است. پایداری زمان ثابت برای سیستم‌های چند عاملی با دینامیک مرتبه دوم در [۲۳] بررسی شده است. در این مقاله هدف اجماع رهبر-پیرو است که با تعریف یک سطح لغزشی جدید پایداری زمان ثابت توسط روش SMC بررسی شده است.

در [۲۴] با استفاده از شبکه‌های عصبی و روش TSMC ورودی کنترلی برای ردیابی یک مسیر توسط ربات با چرخ‌های مکانوم ایجاد شده است. کنترل تطبیقی مقاوم بر پایه SMC برای ربات با چرخ‌های مکانوم در [۸] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله قانون کنترلی مد لغزشی مرتبه دوم طراحی شده و قانون تطبیقی برای تخمین بهره کلید زنی موجود در ورودی کنترلی، مورد بررسی قرار گرفته است.

در این مقاله مدلی از ربات با چرخ‌های مکانوم در نظر گرفته شده است و مدلسازی دینامیکی آن بیان خواهد شد. هدف از ارائه ورودی کنترلی در این پژوهش، ردیابی یک مسیر از پیش تعیین شده در یک زمان ثابت توسط ربات است. از آنجایی که مدل دینامیکی شامل نامعینی است، با استفاده از روش TSMC ورودی کنترلی تعریف خواهد شد که علاوه بر اینکه در مقابل نامعینی‌های



شکل ۲. نمونه‌ای از یک چرخ مکانوم.

موجود در دینامیک یدک کش مقاوم باشد، پایداری زمان ثابت سیستم حلقه بسته نیز برقرار شود.

در برخی از کاربردهای رباتیک، نیاز است که ربات بر روی یک مسیر حرکت کند و فعالیت محوله را انجام دهد. به عنوان مثال، برای حمل و انتقال یک محموله، از یک ربات چهار چرخ با چرخ‌های مکانوم استفاده شده است. این ربات باید این محموله را در سریع‌ترین زمان ممکن، طی یک مسیر از پیش تعریف شده، جابه‌جا کند. در روش‌های مذکور، زمان همگرایی ربات به مسیر از پیش تعریف شده در نظر گرفته نشده است. در این مقاله با تعریف ورودی کنترلی جدید برای دینامیک‌های مذکور برای ربات و استفاده از روش TSMC اثبات شده است که ورودی کنترلی ارائه شده همگرایی ربات با چرخ‌های مکانوم در یک زمان مشخص و ثابت را انجام خواهد داد.

با ورودی کنترلی تعریف شده در این مقاله ربات می‌تواند در یک زمان مشخص و از پیش تعریف شده به مسیر مشخص میل کند. زمان همگرایی ارائه شده در این روش وابسته به شرایط اولیه سیستم نمی‌باشد و به ازای تمام شرایط اولیه این زمان ثابت است. در صورتی که هدف، زمان همگرایی با حداقل مقدار ممکن باشد، با تنظیم پارامترهای ورودی کنترلی این امر امکان‌پذیر است ولی

ممکن است با انتخاب پارامترهای نامناسب، ورودی کنترلی به صورت فیزیکی قابل به سیستم نباشد و عملاً این ورودی کنترلی کاربردی نباشد.

مقاله در چهار بخش کلی تدوین شده است. در بخش اول سیستم ربات چهار چرخ با چرخ‌های مکانوم معرفی شده و در ادامه دینامیک این نوع ربات تعریف شده است. در بخش دوم با توجه به دینامیک سیستم، ورودی کنترلی برپایه‌ی روش TSMC صورت گرفته است و با استفاده از پایداری لیاپانوف، پایداری سیستم حلقه بسته مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش سوم نتایج شبیه سازی با ورودی کنترلی پیشنهادی نشان داده شده است.

۲- مدلسازی و تعریف مسئله

در این قسمت ابتدا مدل دینامیکی ربات با چرخ‌های مکانوم مورد بررسی قرار خواهد گرفت و سپس مسئله‌ی کنترلی مورد نظر، بیان خواهد شد.

۲-۱- مدل جنبشی ربات در چهارچوب جهانی^۱

تصویر یک ربات با چرخ مکانوم به همراه بردارهای هندسی برای مدلسازی در شکل ۳ نمایش داده شده است. از [۲۳] می‌توان معادله‌ی جنبشی این ربات را به صورت زیر تشریح کرد:

$$V_w = J_o \cdot V_o \quad (1)$$

که در آن $V_w = [V_{1w} \ V_{2w} \ V_{3w} \ V_{4w}]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ بردار سرعت در مختصات کارتیزین^۲ است که در آن، $V_{iw} = r_w \dot{\theta}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) و همچنین $V_o = [v_x \ v_y \ \omega_z]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ بردار سرعت چرخ متناظر با سرعت زاویه‌ای چرخ می‌باشد که r_w شعاع چرخ است. همچنین $J_o \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ ماتریس تبدیل می‌باشد و به صورت زیر تعریف شده است:

$$J_o = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(l+L) \\ 1 & 1 & (l+L) \\ 1 & 1 & -(l+L) \\ 1 & -1 & (l+L) \end{bmatrix}$$

از رابطه‌ی (۱) به آسانی می‌توان استنتاج کرد که $V_o = J_o^+ \cdot V_w$ در این رابطه، J_o^+ معکوس مجازی ماتریس (۲) می‌باشد و برابر با $J_o^+ = (J_o^T J_o)^{-1} J_o^T$ می‌باشد. مدل جنبشی ارائه شده در مختصات جهانی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V_o \quad (2)$$

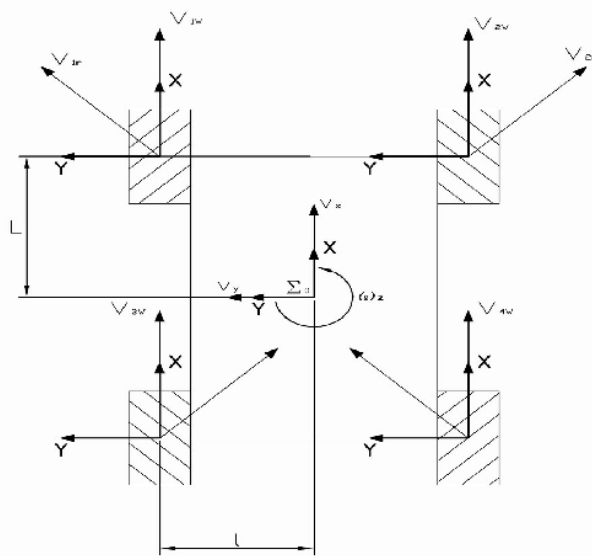
^۱ World Frame

^۲ Cartesian Coordinates

که در این رابطه، $\mathbf{X} = [x_w \ y_w \ \theta]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ موقعیت و جهت ربات در چارچوب جهانی را نمایش می‌دهد. مدل جنبشی ربات در چارچوب کلی^۱، با استفاده از رابطه‌ی (۱) و (۲) به صورت $\dot{\mathbf{X}} = J^+(\theta)\mathbf{V}_w$ قابل بیان است که در آن، $J^+(\theta)$ معکوس مجازی ماتریس زیر است:

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \sin(\theta_a) & -\sqrt{2} \cos(\theta_a) & -(l+L) \\ \sqrt{2} \cos(\theta_a) & \sqrt{2} \sin(\theta_a) & (l+L) \\ \sqrt{2} \cos(\theta_a) & \sqrt{2} \sin(\theta_a) & -(l+L) \\ \sqrt{2} \sin(\theta_a) & -\sqrt{2} \cos(\theta_a) & (l+L) \end{bmatrix} \quad (۳)$$

نمادهای مورد استفاده در روابط فوق در شکل ۳ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۳. تصویر هندسی ربات چهارچرخ با چرخ‌های مکانوم [۲۳].

۲-۲- مدل دینامیکی ربات در چارچوب جهانی

در این بخش، مدل دینامیکی ربات با استفاده از معادله‌ی لاگرانژ در مختصات جهانی ارائه می‌گردد. تابع لاگرانژ به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۲۳]:

$$L = K - V \quad (۴)$$

که در آن V انرژی پتانسیل را نمایش می‌دهد و مقدار آن برابر صفر است، K انرژی جنبشی ربات را نمایش می‌دهد و برابر با:

$$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}J_z\omega_z^2 + \frac{1}{2}J_w(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_4^2) \quad (۵)$$

^۱ Global Frames

در معادله‌ی (۵)، m جرم کلی دستگاه، J_z ممان اینرسی وسیله حول محور Z و J_w ممان اینرسی چرخ‌ها حول مرکز چرخش چرخ‌ها است. معادله‌ی لاگرانژ را به صورت زیر داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} D + F(\dot{\theta}) \right) \quad (6)$$

در این رابطه D تلفات انرژی در نتیجه‌ی اصطکاک ویسکوز را بیان می‌کند، $F(\dot{\theta})$ اصطکاک ایستا است و توسط رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$F(\dot{\theta}) = [f_{c1} \text{sgn}(\dot{\theta}_1) \quad f_{c2} \text{sgn}(\dot{\theta}_2) \quad f_{c3} \text{sgn}(\dot{\theta}_3) \quad f_{c4} \text{sgn}(\dot{\theta}_4)]^T \quad (7)$$

در این رابطه f_{ci} ($i = 1, 2, 3, 4$) به ترتیب ضریب اصطکاک ثابت و سرعت چرخشی چرخ‌های مکانوم هستند. رابطه‌ی (۶) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\tau = M\ddot{\theta} + D_\theta\dot{\theta} + F(\dot{\theta}) \quad (8)$$

که D_θ ضریب اصطکاک ویسکوز چرخ‌ها است. و ماتریس ثابت M به صورت زیر بیان گردیده شده است:

$$M = \begin{bmatrix} a_j + b_j + j_w & -b_j & b_j & a_j - b_j \\ -b_j & a_j + b_j + j_w & a_j - b_j & b_j \\ b_j & a_j - b_j & a_j + b_j + j_w & -b_j \\ a_j - b_j & b_j & -b_j & a_j + b_j + j_w \end{bmatrix} \quad (9)$$

در این ماتریس، a_j ، b_j مقادیر ثابتی دارند و برابرند با:

$$a_j = \frac{mr_w}{8}, \quad b_j = \frac{j_z r_w^2}{16(l+l)^2}, \quad (10)$$

با دو بار مشتق‌گیری از X و استفاده از روابط (۱)-(۸) مدل دینامیکی یک ربات با چرخ‌های مکانوم توسط رابطه‌ی زیر توصیف می‌گردد [۲۳]:

$$\ddot{X} = r_w J^+(\theta) \left[M^{-1} \left(\tau - \frac{1}{r_w} D_\theta J(\theta) \dot{X} - F(\dot{\theta}) \right) \right] - J^+(\theta) \dot{J}(\theta) \dot{X} \quad (11)$$

در رابطه‌ی (۱۱)، بردار حالت $X(t) \triangleq [x_w(t) \quad y_w(t) \quad \theta(t)]^T$ موقعیت و جهت ربات را بیان می‌کند. شعاع چرخ و اصطکاک ویسکوز به ترتیب به صورت r_w و D_θ نشان داده شده‌اند. گشتاور اعمال شده برای ربات توسط بردار $\tau \triangleq [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4]^T$ تعریف شده است. مدل دینامیکی (۱۱) را می‌توان با فرم فضای حالت زیر با چهار ورودی و سه خروجی زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -F + (r_w J^+(\theta) M^{-1}) \tau \end{cases} \quad (12)$$

در این مدل، بردار نامعینی مدل F به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$F \triangleq (D_\theta J^+(\theta) M^{-1} J(\theta) + J^+(\theta) j(\theta)) X_2 + r_w J^+(\theta) M^{-1} F(\dot{\theta}) \quad (13)$$

۲-۳- بیان مسئله

یک ربات با چرخ‌های مکانوم با مدل دینامیکی (۱۲) را در نظر بگیرید. هدف، ردیابی یک مسیر از پیش تعریف شده توسط ربات در یک زمان ثابت است. برای دستیابی به این هدف باید حالت‌های ربات در یک زمان مشخص به حالت‌های مسیر از پیش تعریف شده میل کنند. اگر $X_d(t) \triangleq [x_d(t) \quad y_d(t) \quad \theta(t)]^T$ یک مسیر مرجع مشتق‌پذیر باشد بطوری که مشتق آن یعنی $\dot{X}_d(t)$ نیز موجود باشد، در این صورت برای ردیابی مسیر در یک زمان ثابت، باید شرایط زیر همزمان برقرار باشند:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T_{max}} X_1 - X_d &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow T_{max}} X_2 - \dot{X}_d &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

بردار خطای وضعیت و بردار خطای سرعت به صورت زیر قابل تعریف هستند:

$$\begin{aligned} e_1 &\triangleq X_1 - X_d \\ e_2 &\triangleq X_2 - \dot{X}_d \end{aligned} \quad (15)$$

با مشتق‌گیری از روابط (۱۵) و استفاده از مدل دینامیکی (۱۲)، مدل خطا به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -F + (r_w J^+(\theta) M^{-1}) \tau - \dot{X}_d \end{cases} \quad (16)$$

در این رابطه، هر یک از بردارهای خطا به صورت $e_1 \triangleq [e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13}]^T$ و $e_2 \triangleq [e_{21} \quad e_{22} \quad e_{23}]^T$ تعریف شده‌اند. هدف، طراحی گشتاور مورد نیاز برای هر موتور الکتریکی است به طوری که ربات صرف نظر از موقعیت اولیه (شرایط اولیه)، در یک زمان ثابت و مشخص به مسیر از پیش تعیین شده همگرا گردد. برای بردار نامعینی، فرض زیر برقرار است.

فرض ۱. ثابتهای مثبت و حقیقی $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ وجود دارد بطوریکه برای هر درایه‌ی بردار نامعینی $F \triangleq [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T$ داشته باشیم، $|f_i| < \sigma_i, i = 1, 2, 3$.

لم زیر بسط روش پایداری لیاپانوف می‌باشد و شرایط کافی برای بررسی پایداری زمان ثابت نقطه تعادل یک سیستم غیرخطی را ارائه می‌دهد.

لم ۱ [۲۴]. اگر یک تابع شعاعی نامحدود پیوسته $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ وجود داشته باشد بطوری که:

$$V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (۱)$$

(۲) هر پاسخ $x(t)$ در نامعادله $\dot{V}(x(t)) \leq -(\alpha V^p(x(t)) + \beta V^q(x(t)))^k$ به ازای ضرایب ثابت و حقیقی $\alpha, \beta, p, q, k > 0; pk < 1, qk > 1$ برقرار باشند.

در این صورت مبدأ مختصات پایدار زمان ثابت می‌باشد و تخمین زیر به عنوان تابع زمان نشست، برقرار است:

$$T(x_0) \leq \frac{1}{\alpha^{k(1-pk)}} + \frac{1}{\beta^{k(qk-1)}}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (۱۷)$$

با توجه به مدل ارائه شده (۱۲) و دینامیک خطای (۱۶)، در این مقاله هدف طراحی کنترل کننده‌ای است که ربات در یک زمان مشخص به مسیر مطلوب همگرا شود. زمان همگرایی به مسیر مطلوب معلوم است و این زمان به شرایط اولیه ربات بستگی ندارد.

۳- طراحی کنترل کننده

در این بخش، قانون کنترلی برای تضمین پایداری زمان ثابت ربات با چرخ‌های مکانوم طراحی می‌شود. روش ارائه شده در این قسمت برپایه TSMC است. کنترل کننده در این مقاله برپایه یک سطح لغزشی جدید طراحی شده است که با مسائل مربوط به ناتکینی در ورودی کنترلی ایجاد شده روبرو نخواهد شد.

سطح لغزشی زیر در نظر بگیرید [۲۵]:

$$s_1 \triangleq e_{11} + \left(\frac{1}{\alpha_1 e_{11}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1} e_{21} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} = e_{11} + (K(e_{11})e_{21})^{\frac{q_1}{p_1}} \quad (۱۸)$$

در این سطح لغزشی، p_1, q_1 و n_1, m_1 اعداد مثبت و فرد هستند و در روابط $p_1 < q_1 < 2p_1$ و $m_1 > n_1$ صدق می‌کنند، علاوه بر آن α_1, β_1 اعداد مثبت و حقیقی در نظر گرفته شده‌اند. سطح لغزشی (۱۸) به ازای تمام $e_{11} \in \mathbb{R}$ تعریف شده است. سطح لغزشی را برای بردار خطا به صورت زیر قابل تعریف است:

$$s \triangleq e_1 + (K \cdot e_2)^{\frac{q_1}{p_1}} \quad (۱۹)$$

در این رابطه $S \triangleq [s_1 \quad s_2 \quad s_3]^T$ به عنوان بردار سطح لغزشی می‌باشد و بردار K به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1 e_{11}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1} \\ \frac{1}{\alpha_1 e_{12}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1} \\ \frac{1}{\alpha_1 e_{13}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1} \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

ورودی کنترلی ایجاد شده برپایه‌ی TSMC به صورت رابطه‌ی (۲۱) در نظر گرفته شده است:

$$\tau \triangleq r_w^{-1} M J(\theta) \left(\dot{X}_d - K^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{q_1} K^{1-\frac{q_1}{p_1}} e_2^{2-\frac{q_1}{p_1}} - \left(\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{p_1}{q_1} \right) e_1^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1} \cdot (K \cdot e_2)^2 \right) \frac{p_1}{q_1} K^{-\frac{q_1}{p_1}} e_2^{1-\frac{q_1}{p_1}} \cdot \left(\alpha_2 s^{\frac{m_2}{n_2}} + \beta_2 s^{\frac{p_2}{q_2}} \right) \right) \right) \quad (21)$$

در رابطه‌ی (۱۹) و (۲۱)، علامت. نشان‌دهنده‌ی ضرب درایه‌های متناظر هر بردار به هم می‌باشد. همچنین در این دو رابطه، با به توان رساندن هر بردار به مقدار تعیین شده، هر درایه‌ی بردار متناظر به توان می‌رسد. قضیه زیر، شرط کافی برای پایداری زمان ثابت سیستم (۱۲) تحت ورودی کنترلی (۲۱) با زمان همگرایی مشخص را ارائه می‌دهد.

قضیه ۱: سیستم مرتبه دوم غیرخطی (۱۲) با ورودی کنترلی طراحی شده‌ی (۲۱) را در نظر بگیرید. با ورودی طراحی شده، بردار خطای وضعیت و سرعت در یک زمان ثابت به مقدار صفر همگرا می‌شوند و تخمین زمان نشست از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$T \leq \frac{1}{2^{\frac{m_2-n_2}{2n_2}} n_2^{-1} \alpha_2^{\frac{m_2+n_2}{2n_2}} (n_2-m_2)} + \frac{1}{2^{\frac{p_2-q_2}{2q_2}} q_2^{-1} \alpha_2^{\frac{p_2+q_2}{2q_2}} (p_2-q_2)} \quad (22)$$

در این رابطه، $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ و $\beta_1, \beta_2 > 0$ برقراراند و q_j, p_j, m_j, n_j به ازای $(j = 1, 2)$ اعدادی مثبت و فرد هستند. هر یک از این ضرایب بایستی در روابط $p_2 > q_2$ و $m_1/n_1 - p_1/q_1 > 1$ و $n_2 > m_2$ صدق کنند.

اثبات: تابع لیاپانوف $V = \frac{1}{2} s^2$ و مشتق آن، $\dot{V} = \dot{s}s$ را در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۱۹) و استفاده از رابطه‌ی (۱۶) و (۲۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{e}_1 + \frac{q_1}{p_1} (\dot{K} \cdot e_2 + K \cdot \dot{e}_2) (K \cdot e_2)^{\frac{q_1}{p_1}-1} = e_2 + \frac{q_1}{p_1} \left(\dot{K} \cdot e_2 + K \cdot (-F + (r_w J^+(\theta) M^{-1}) \tau - \right. \\ &\left. \dot{X}_d) \right) (K \cdot e_2)^{\frac{q_1}{p_1}-1} = e_2 + \frac{q_1}{p_1} \left(\dot{K} \cdot e_2 + K \cdot \left(-F \left(\dot{X}_d - K^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{q_1} K^{1-\frac{q_1}{p_1}} e_2^{2-\frac{q_1}{p_1}} - \left(\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \left. \left. \frac{p_1}{q_1} \right) e_1^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1} \cdot (K \cdot e_2)^2 \right) - \frac{p_1}{q_1} K^{-\frac{q_1}{p_1}} e_2^{1-\frac{q_1}{p_1}} \cdot \left(\alpha_2 s^{\frac{m_2}{n_2}} + \beta_2 s^{\frac{p_2}{q_2}} \right) \right) - \dot{X}_d \right) \cdot (K \cdot e_2)^{\frac{q_1}{p_1}-1} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

از آنجایی که در رابطه‌ی (۲۳) نسبت به زمان مشتق‌گیری شده است، برای مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۲۰) داریم:

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{de_1} \cdot \frac{de_1}{dt} = e_2 \cdot \frac{dK}{de_1} = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{p_1}{q_1} \right) e_{11}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1} \\ \frac{\left(\alpha_1 e_{11}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1 \right)^2}{-\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{p_1}{q_1} \right) e_{12}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1}} \\ \frac{\left(\alpha_1 e_{12}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1 \right)^2}{-\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{p_1}{q_1} \right) e_{13}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1}} \\ \frac{\left(\alpha_1 e_{13}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1 \right)^2}{-\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{p_1}{q_1} \right) e_{21} e_{11}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1}} \\ \frac{\left(\alpha_1 e_{11}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1 \right)^2}{-\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{p_1}{q_1} \right) e_{22} e_{12}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1}} \\ \frac{\left(\alpha_1 e_{12}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1 \right)^2}{-\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{p_1}{q_1} \right) e_{23} e_{13}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1}} \\ \frac{\left(\alpha_1 e_{13}^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)} + \beta_1 \right)^2}{-\alpha_1 \left(\frac{m_1}{n_1} - \frac{p_1}{q_1} \right) e_2 \cdot e_1^{(m_1/n_1)-(p_1/q_1)-1}} \end{bmatrix} \cdot K^2 \quad (24)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۴)، فرم ساده شده‌ی رابطه‌ی (۲۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{s} = - \left(\alpha_2 s^{\frac{m_2}{n_2}} + \beta_2 s^{\frac{p_2}{q_2}} \right) - \frac{q_1}{p_1} K^{\frac{q_1}{p_1}} e_2^{\frac{q_1}{p_1}-1} \cdot F \quad (25)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۵) در مشتق تابع لیاپانوف داریم:

$$\dot{V} \leq -\alpha_2 s^{1+\frac{m_2}{n_2}} - \beta_2 s^{1+\frac{p_2}{q_2}} - \frac{q_1}{p_1} |s| \cdot \left| K^{\frac{q_1}{p_1}} \right| \cdot \left| e_2^{\frac{q_1}{p_1}-1} \right| \cdot |F| \leq -\alpha_2 s^{1+\frac{m_2}{n_2}} - \beta_2 s^{1+\frac{p_2}{q_2}} = -\alpha_2 (2V)^{\frac{m_2+n_2}{2n_2}} - \beta_2 (2V)^{\frac{p_2+q_2}{2q_2}} \quad (26)$$

بنابراین، لم ۱ تضمین می‌کند همگرایی مدل دینامیکی (۱۲) با ورودی کنترلی ایجاد شده‌ی (۲۱)، به مسیر از پیش تعیین شده، در یک زمان ثابت انجام می‌شود و زمان همگرایی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$T \leq \frac{1}{2 \frac{m_2-n_2}{2n_2} n_2^{-1} \alpha_2^{\frac{m_2+n_2}{2n_2}} (n_2-m_2)} + \frac{1}{2 \frac{p_2-q_2}{2q_2} q_2^{-1} \alpha_2^{\frac{p_2+q_2}{2q_2}} (p_2-q_2)} \quad (27)$$

همانطور که اثبات شد، با اعمال ورودی کنترلی (۲۱)، ربات با چرخ‌های مکانوم با مدل دینامیکی (۱۲)، به مسیر از پیش تعیین شده، در یک زمان ثابت همگرا می‌شود.

ترکیب مبحث پایداری زمان ثابت با TSMC به صورت کاربردی برای ربات با چرخ‌های مکانوم، در مقالات موجود در مورد این نوع ربات‌ها مطرح نشده است. در [۸] برای غلبه بر نامعینی‌ها از کنترل مدلفزشی تطبیقی مقاوم بهره گرفته شده است. در مقایسه با ورودی کنترلی (۲۱)، در این مقاله زمان همگرایی مدنظر قرار نگرفته است. رویکرد طراحی کنترل کننده هوشمند مبتنی بر شبکه‌های فازی برای ربات‌های مکانوم در [۱] ارائه گردیده است. در این مقاله پس از استخراج مدل دینامیکی ربات، یک کنترل کننده تطبیقی هوشمند برای دستیابی به ردیابی طراحی شده است. این کنترل کننده بر پایه‌ی شبکه‌های موجک فازی طراحی شده است.

۴- شبیه‌سازی

در این بخش برای نمایش عملکرد قانون کنترلی ارائه شده‌ی در قضیه ۱ شبیه‌سازی ارائه شده است. در جدول ۱، مقادیر پارامترهای مدل دینامیک استفاده شده در شبیه‌سازی آمده است.

جدول ۱. پارامترهای مدل دینامیکی

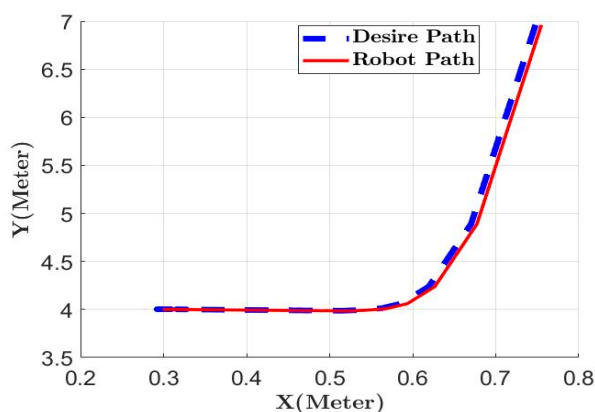
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
m [Kg]	100	J_w	0.5
r_ω [m]	0.11	D_θ	0.2
L [m]	3.00	f_{ci} [N], $i = 1,2,3,4$	15
l [m]	2.00	J_z [Kg - m ²]	0.1

برای بررسی ورودی کنترلی، دو مسیر متفاوت در نظر گرفته شده است. در هر دو مسیر پارامترهای ورودی کنترلی به صورت $q_2 = 5, p_2 = 9, n_2 = 5, m_2 = 3, q_1 = 9, p_1 = 7, n_1 = 5, m_1 = 9, \alpha_2 = \beta_2 = 1, \alpha_1 = \beta_1 = 2$ انتخاب شده‌اند. با در نظر گرفتن شرایط اولیه صفر و با توجه به پارامترهای ورودی کنترلی و رابطه‌ی (۲۲)، در هر دو مسیر زمان همگرایی باید کمتر از ۴/۰۱ ثانیه باشد. در شبیه‌سازی اول، هدف ربات ردیابی مسیر ثابت است که با رابطه‌ی $X_d = [0.3 \quad 4 \quad \pi/2]^T$ بیان می‌شود. در شکل‌های ۴ و ۶ به ترتیب ردیابی مسیر توسط ربات و خطای ردیابی مربوط به آن نشان داده شده است. یکی از حالت‌های سیستم، وضعیت ربات است که این حالت در شکل ۵ نمایش داده شده است. در شکل ۸ و ۹ ورودی کنترلی ایجاد شده توسط رابطه‌ی (۲۱) و منحنی‌های مدلفزشی نشان داده شده‌اند. پاسخ گذرای ورودی کنترلی برای این حالت دارای یک فراجهش و فروجهش است که پس از طی یک زمان کمتر از زمان همگرایی به حالت مانای خود می‌رسد. حالت مانا به صورت سیگنال سینوسی متناوب می‌باشد. در صورتی که مقادیر پارامترهای کنترل کننده بزرگ انتخاب شود تا زمان همگرایی پایین بدست آید، اندازه‌ی ورودی کنترلی کننده بزرگ می‌شود و به صورت عملی قابل اعمال نمی‌باشد.

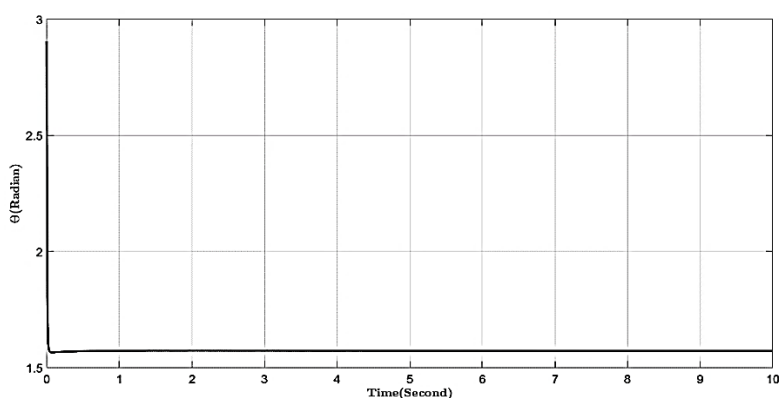
در حالت دوم مسیر متغیر با زمانی به صورت زیر در نظر گرفته شده است. با در نظر گرفتن این مسیر، نتایج شبیه‌سازی و خطای ردیابی آن در شکل‌های ۱۰ و ۱۲ نشان داده شده است:

$$X_d(t) = \begin{bmatrix} \frac{0.3 \cos(t)}{1+\sin^2(2t)} & \frac{0.4 \sin(t) \cos(t)}{1+\sin^2(2t)} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (28)$$

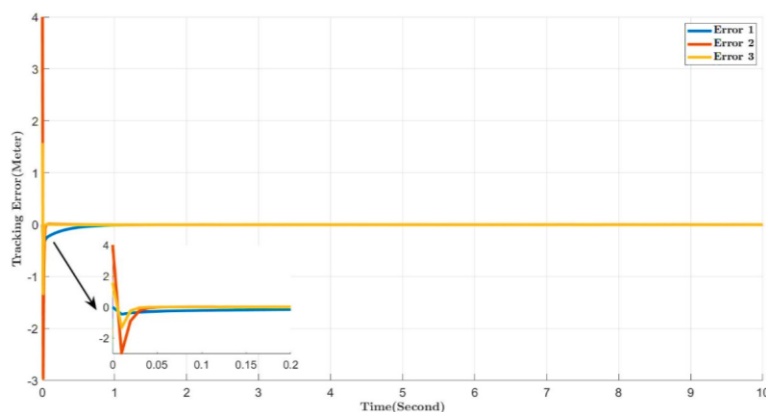
وضعیت ربات در این مثال، در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. در دو شکل ۴ و ۱۰، مسیر مطلوب با خط ضخیم و مسیر حرکتی ربات با خط نازک نشان داده شده است. در اشکال ۶ و ۱۲ خطای ردیابی نشان داده شده است. همانطور که مشخص است در خطای ردیابی مسیر ثابت و مسیر متغیر با زمان، زمان همگرایی خطا به مقدار صفر کمتر از $4/01$ ثانیه است. ورودی‌های کنترلی برای این حالت و منحنی‌های لغزشی در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نشان داده شده است. زمان نشست در این حالت به نسبت حالت قبل کمی طولانی‌تر است و مقدار دامنه‌ی ورودی کنترلی در این حالت بیشتر از حالت مسیر ثابت است.



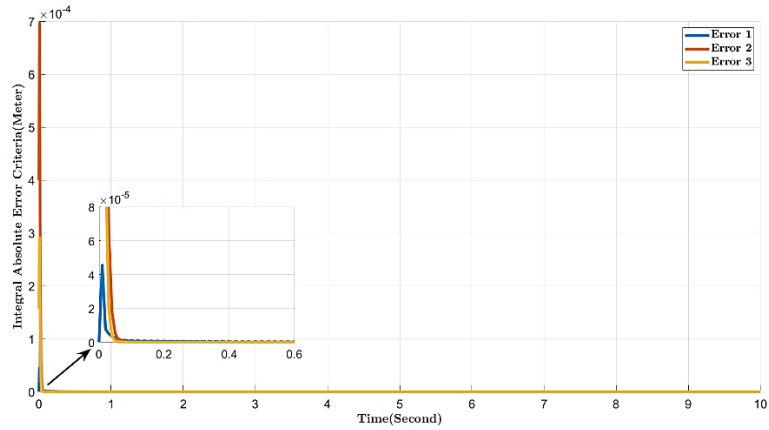
شکل ۴. ردیابی مسیر ثابت از پیش تعیین شده توسط ربات.



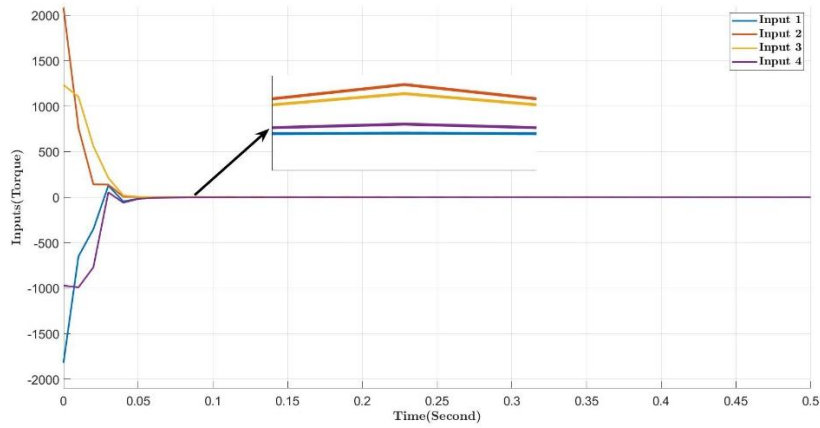
شکل ۵. نمایش بردار وضعیت برای مسیر ثابت.



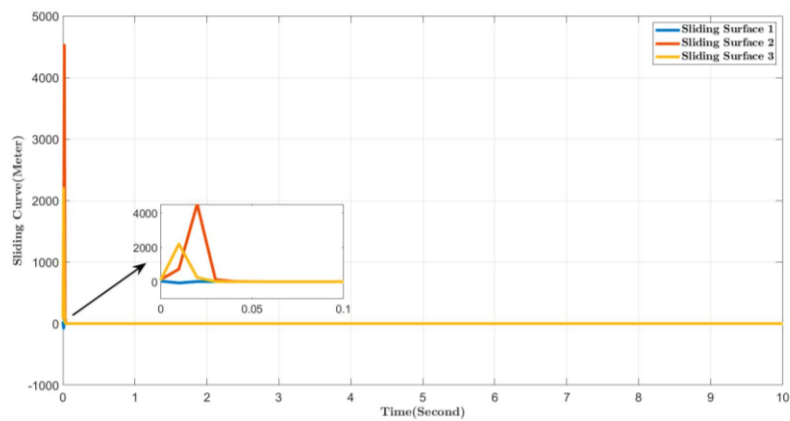
شکل ۶. خطای ردیابی مسیر ثابت در زمان ثابت توسط ربات چهارچرخ.



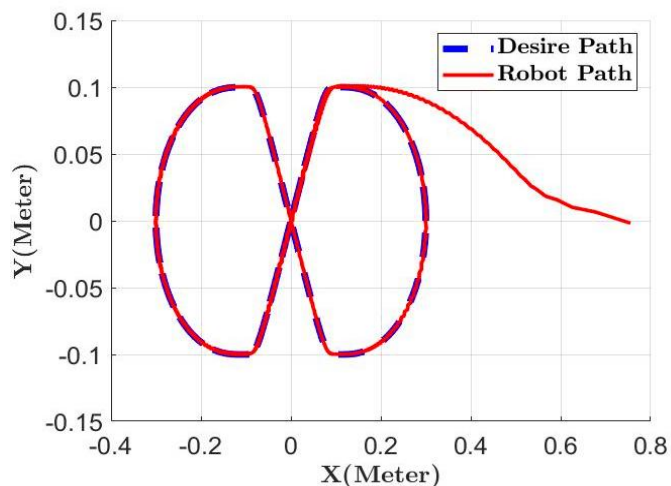
شکل ۷. معیار IEA برای مسیر ثابت.



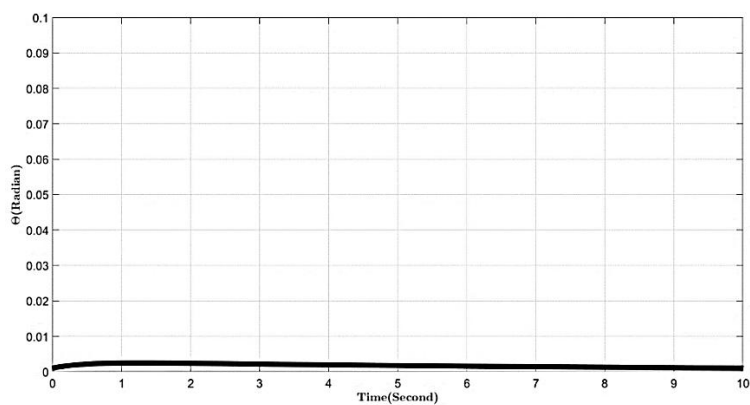
شکل ۸. ورودی‌های کنترلی برای مسیر ثابت برای هر چهار موتور.



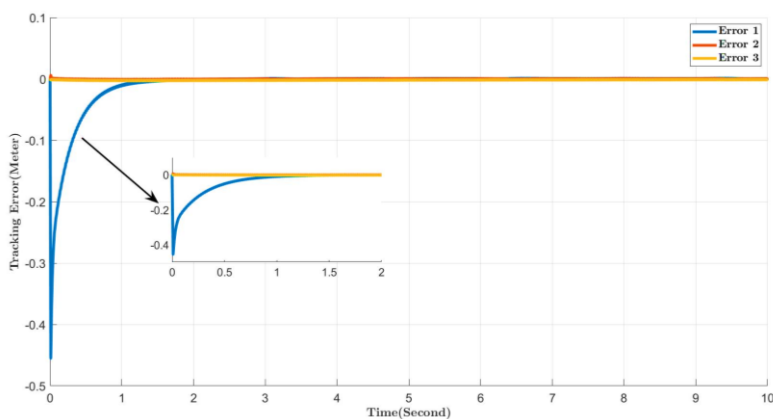
شکل ۹. منحنی‌های سطح لغزشی برای حالت مسیر ثابت.



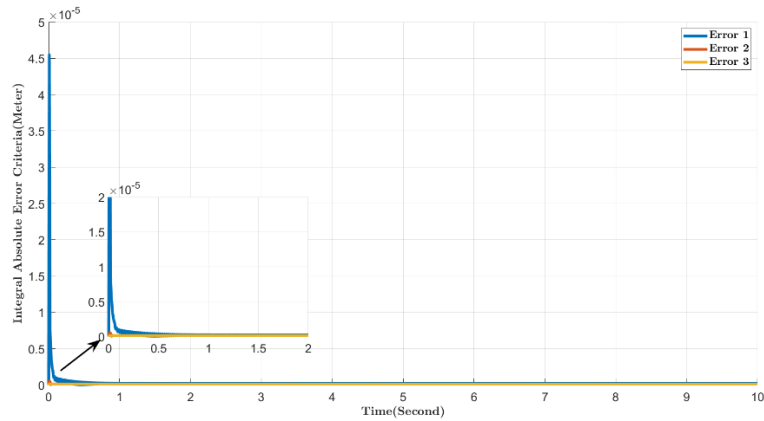
شکل ۱۰. ردیابی مسیر متغیر با زمان توسط ربات چهار چرخ.



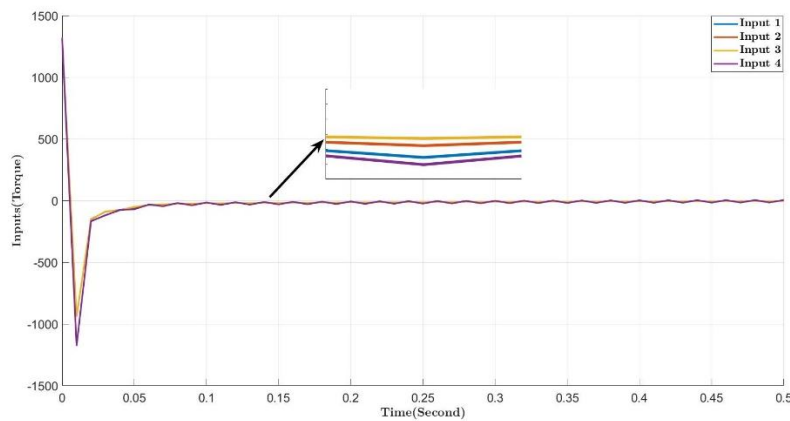
شکل ۱۱. بردار وضعیت برای مسیر متغیر با زمان.



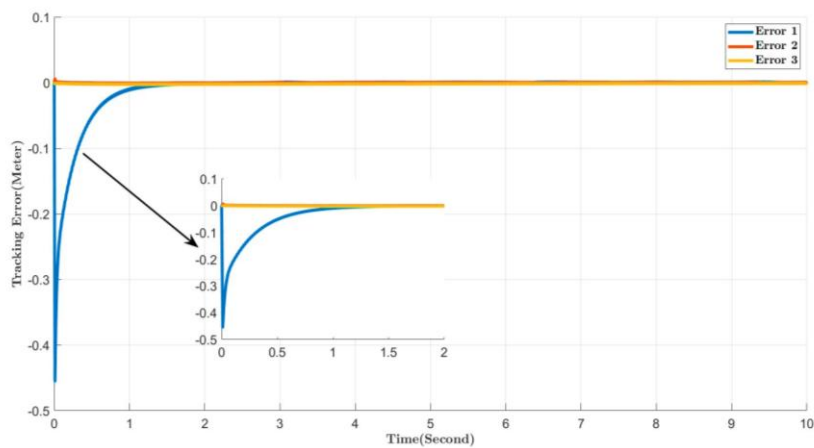
شکل ۱۲. خطای ردیابی مسیر متغیر با زمان، در زمان ثابت توسط ربات چهار چرخ.



شکل ۱۳. معیار IEA برای مسیر متغیر با زمان.



شکل ۱۴. ورودی‌های کنترلی برای مسیر متغیر با زمان برای هر چهار موتور.



شکل ۱۵. منحنی‌های سطح لغزشی برای حالت مسیر متغیر با زمان.

در مرجع [۸] سطح مدلغزشی بدون در نظر گرفتن زمان همگرایی مورد بررسی قرار گرفته است. به دلیل وجود پارامترهای نامعلوم با استفاده از قوانین تطبیق طراحی شده، پارامترهای مذکور را برآورد می‌کند. رویکرد ارائه شده در این مرجع SMC و کنترل تطبیقی برای ربات‌های با چرخ مکانوم است. در [۲۳] رویکرد NTSC برای وسایل با چرخ‌های مکانوم در نظر گرفته شده است.

بدلیل اینکه زمان همگرایی به عنوان عملکرد موثر سیستم حلقه بسته در یک وسیله تاثیرگذار است، مرجع [۲۵] یک سطح مدلغزشی ناتکین را برای پایداری زمان ثابت ارائه داده است. در این مقاله از رویکرد مرجع [۲۵] استفاده شده است و همگرایی زمان ثابت مورد ارزیابی قرار گرفته است. به جهت بررسی عملکرد، در شکل‌های ۷ و ۱۳ به ترتیب معیار IEA برای مسیرهای حرکتی زمان ثابت و متغیر ارائه شده است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، ورودی کنترلی برای ربات چهار چرخ با چرخ‌های مکانوم برای همگرایی به مسیر مطلوب در زمان ثابت مبتنی بر روش TSMC ارائه شده است. این روش با کلیدزنی بر روی سطوح غیرخطی، همگرایی سریع و زمان محدود را بدون نیروی کنترلی زیاد ایجاد می‌کند. در روش‌های پیشین که بر پایه‌ی SMC ایجاد شده‌اند، زمان همگرایی را مد نظر قرار نداده‌اند و همگرایی در زمان محدود را ایجاد نمی‌کنند. همچنین در روش‌های ارائه شده بر پایه‌ی روش TSMC، نتایج این روش برای سیستم با دینامیک ساده مورد بررسی قرار گرفته‌اند که در این مقاله، این روش برای دینامیک غیرخطی با ابعاد بالا استفاده شده است.

مراجع

- [1] C.-C. Tsai, H.-L. Wu, and Y.-R. Lee, "Intelligent adaptive motion controller design for mecanum wheeled omnidirectional robots with parameter variations," *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 11, no. Supplement, pp. 91–96, 2010.
- [2] F. G. Pin and S. M. Killough, "A new family of omnidirectional and holonomic wheeled platforms for mobile robots," *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 10, no. 4, pp. 480–489, 1994.
- [3] N. Tlale and M. de Villiers, "Kinematics and dynamics modelling of a mecanum wheeled mobile platform," in *2008 15th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice*, 2008, pp. 657–662.
- [4] Y. Li, S. Dai, Y. Zheng, F. Tian, and X. Yan, "Modeling and Kinematics Simulation of a Mecanum Wheel Platform in RecurDyn," *J. Robot.*, vol. 2018, 2018.
- [5] N. M. Adam, A. Irawan, M. R. Daud, Z. M. Zain, and S. N. S. Ali, "Dynamic Modeling and Analysis of Omnidirectional Wheeled Robot: Turning Motion Analysis," *J. Telecommun. Electron. Comput. Eng.*, vol. 10, no. 1–3, pp. 103–108, 2018.
- [6] K.-L. Han, O.-K. Choi, J. Kim, H. Kim, and J. S. Lee, "Design and control of mobile robot with mecanum wheel," in *ICCAS-SICE, 2009*, 2009, pp. 2932–2937.
- [7] I. Doroftei, V. Grosu, and V. Spinu, "Design and control of an omni-directional mobile robot," *Nov. Algorithms Tech. Telecommun. Autom. Ind. Electron.*, pp. 105–110, 2008.
- [8] V. Alakshendra and S. S. Chiddarwar, "Adaptive robust control of Mecanum-wheeled mobile robot with uncertainties," *Nonlinear Dyn.*, vol. 87, no. 4, pp. 2147–2169, 2017.
- [9] S. G. Tzafestas, *Introduction to mobile robot control*. Elsevier, 2013.
- [10] P. Muir and C. Neuman, "Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robot," in *Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on*, 1987, vol. 4, pp. 1772–1778.
- [11] P. Viboonthaicheep, A. Shimada, and Y. Kosaka, "Position rectification control for Mecanum wheeled omni-directional vehicles," in *Industrial Electronics Society, 2003. IECON'03. The 29th Annual Conference of the IEEE*, 2003, vol. 1, pp. 854–859.

- [12] T. D. Viet, P. T. Doan, N. Hung, H. K. Kim, and S. B. Kim, "Tracking control of a three-wheeled omnidirectional mobile manipulator system with disturbance and friction," *J. Mech. Sci. Technol.*, vol. 26, no. 7, pp. 2197–2211, 2012.
- [13] D. Xu, D. Zhao, J. Yi, and X. Tan, "Trajectory tracking control of omnidirectional wheeled mobile manipulators: robust neural network-based sliding mode approach," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. Part B*, vol. 39, no. 3, pp. 788–799, 2009.
- [14] M. Zak, "Terminal attractors for addressable memory in neural networks," *Phys. Lett. A*, vol. 133, no. 1–2, pp. 18–22, 1988.
- [15] M. Zak, "Terminal attractors in neural networks," *Neural networks*, vol. 2, no. 4, pp. 259–274, 1989.
- [16] S. T. Venkataraman and S. Gulati, "Control of nonlinear systems using terminal sliding modes," *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol. 115, no. 3, pp. 554–560, 1993.
- [17] M. Zhihong and X. H. Yu, "Terminal sliding mode control of MIMO linear systems," *IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl.*, vol. 44, no. 11, pp. 1065–1070, 1997.
- [18] Y. Wu, X. Yu, and Z. Man, "Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems," *Syst. Control Lett.*, vol. 34, no. 5, pp. 281–287, 1998.
- [19] L. Yang and J. Yang, "Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 21, no. 16, pp. 1865–1879, 2011.
- [20] Y. Feng, X. Yu, and Z. Man, "Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators," *Automatica*, vol. 38, no. 12, pp. 2159–2167, 2002.
- [21] A. Polyakov, "Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 57, no. 8, p. 2106, 2012.
- [22] A. Polyakov and L. Fridman, "Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems," *J. Franklin Inst.*, vol. 351, no. 4, pp. 1831–1865, 2014.
- [23] C.-C. Tsai and H.-L. Wu, "Nonsingular terminal sliding control using fuzzy wavelet networks for Mecanum wheeled omni-directional vehicles," in *Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference on*, 2010, pp. 1–6.
- [24] M. Defoort, A. Polyakov, G. Demesure, M. Djemai, and K. Veluvolu, "Leader-follower fixed-time consensus for multi-agent systems with unknown non-linear inherent dynamics," *IET Control Theory Appl.*, vol. 9, no. 14, pp. 2165–2170, 2015.
- [25] Z. Zuo, "Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks," *Automatica*, vol. 54, pp. 305–309, 2015.